

Sapienza Università di Roma, Sede di Latina
Programma di Geometria per i corsi di Ingegneria
a.a. 2019-2020 – a.a. 2020-21

docente: Bruno A. Cifra

Strutture. Sostegno e struttura. Strutture relazionali: relazioni di equivalenza e relazioni d'ordine. Strutture geometriche: spazi topologici, spazi di misura, spazi affini. Strutture algebriche elementari: semigrupperi, monoidi, gruppi, anelli, corpi, campi, spazi vettoriali, algebre. Strutture metriche: Spazi metrici. Spazi normati. Spazi con prodotto scalare. Completezza negli spazi metrici. Spazi Euclidei. Strutture negli insiemi numerici \mathcal{N} , \mathcal{Z} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} , \mathcal{C} .

Matrici. Definizione di matrice e relativa simbologia. Operazioni con matrici. Matrici particolari. Matrici e operazioni elementari di riga. Determinante e sue principali proprietà. Complementi algebrici. Teorema di Laplace. Teorema di Binet. Rango per minori. Matrice inversa. Riduzione a scala (metodo di Gauss). Rango per piloni. Teorema degli orlati. Calcolo della matrice inversa mediante la doppia riduzione a scala.

Vettori, spazi vettoriali, sottospazi. Vettori, spazi vettoriali. Vettori numerici e spazi vettoriali \mathbb{R}^n . Operazioni con vettori. Esempi di spazi vettoriali. Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Rango per righe e rango per colonne di una matrice. Basi di spazi vettoriali. Base canonica e altre basi in \mathbb{R}^n . Coordinate di un vettore rispetto a una data base. Sottospazi. Sottospazi di \mathbb{R}^n e sistemi omogenei. Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi di \mathbb{R}^n . Sottospazio generato da alcuni vettori. Intersezione di sottospazi.

Sistemi lineari. Matrice incompleta e matrice completa di un sistema lineare. Sistemi lineari omogenei. Teorema di Cramer. Riduzione a scala per la soluzione di un sistema lineare. Teorema di Rouché-Capelli. Discussione di sistemi lineari con coefficienti parametrici.

Vettori geometrici. Vettori geometrici liberi e vettori applicati, nel piano e nello spazio. Coordinate in un riferimento. Vettori i, j, k . Rappresentazione di punti e di vettori geometrici. Vettore geometrico che ha come estremi due punti ordinati. Lunghezza di un vettore geometrico. Distanza tra punti. Versori. Vettore normalizzato. Proiezione ortogonale (numerica) di un vettore su un altro vettore (o sul suo prolungamento). Prodotto scalare tra vettori geometrici e sua formula cartesiana. Parallelismo di due vettori, complanarità (nello spazio) di tre vettori. Angolo tra due vettori e calcolo del suo coseno.

Geometria del piano. Forma cartesiana (implicita ed esplicita), forma parametrica di una retta. Quota e coefficiente angolare. Eliminazione del parametro per passare da forma parametrica a cartesiana. Parametri direttori, coseni direttori. Parallelismo, perpendicolarità tra rette. Giacitura . Fasci propri e impropri di rette. Equazioni di rette con specifiche iniziali. Allineamento di punti. Vettore normale a una retta. Distanza tra un punto e una retta. Interpretazione geometrica di un sistema lineare in due variabili, come intersezione di rette.

Geometria dello spazio. Forma cartesiana, forma parametrica di un piano. Piani paralleli. Mutue posizioni di due piani. Allineamento di punti. Parametri direttori, coseni direttori di rette. Forma cartesiana e parametrica di una retta. Eliminazione del parametro per passare da forma parametrica a cartesiana. Parallelismo di rette. Fasci propri e impropri di piani. Fasci e stelle di rette. Giacitura. Rette sghembe. Mutue posizioni di rette . Parallelismo tra retta e piano. Mutue posizioni di retta e piano. Vettore normale a un piano. Piani perpendicolari. Rette perpendicolari a un piano. Distanza tra un punto e un piano. Distanza tra un punto e una retta. Distanza tra rette. Interpretazione geometrica di sistemi lineari in tre variabili. Angolo tra due piani, tra due rette, tra un piano e una retta.

Sottospazi di \mathbb{R}^n : intersezione, somma, ortogonalità . Prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n . Vettori ortogonali. Sottospazio ortogonale a un dato sottospazio, e sue equazioni cartesiane. Somma di sottospazi. Relazione di Grassmann. Somma diretta. Prodotto vettoriale. Area di un parallelogramma nello spazio. Basi ortogonali. Proiezione ortogonale e componente ortogonale di un vettore rispetto a un sottospazio. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Coefficienti di Fourier. Complemento ortogonale.

Insiemi ed applicazioni. Applicazioni tra insiemi. Dominio, codominio, immagine, controimmagine. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Composizione di applicazioni. Applicazione inversa di un'applicazione biettiva.

Applicazioni lineari. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali generici: omomorfismi, monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi, endomorfismi, automorfismi. Applicazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Matrice associata ad una applicazione lineare, rispetto a una base del dominio e ad una del codominio. Composizione di applicazioni lineari e prodotto delle relative matrici. Nucleo e immagine. Iniettività, suriettività, biiettività di un'applicazione lineare, e loro relazione col rango della matrice associata. Legame tra il nucleo e l'iniettività. Matrice inversa per l'applicazione inversa. Descrizione geometrica di un'applicazione lineare se le dimensioni del dominio e del codominio sono minori o uguali a tre.

Cambiamenti di base e di coordinate. Matrice del cambiamento di base in uno spazio vettoriale e azione sulle coordinate. Matrice di un'applicazione lineare rispetto a due nuove basi nel dominio e nel codominio, o ad una nuova base solo nel dominio o solo nel codominio. Relazioni di similitudine e similitudine generalizzata. Diagramma di similitudine. Traccia di una matrice e invarianza per similitudine.

Autovettori e diagonalizzazione. Autovettori e autovalori di un endomorfismo. Polinomio caratteristico e invarianza per similitudine. Diagonalizzazione mediante un opportuno cambiamento di base. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Diagonalizzazione di applicazioni la cui matrice è simmetrica (*teorema spettrale*).

Piano affine e trasformazioni. Struttura analitica di piano affine. Affinità e *matrice portante*. Traslazioni, Dilatazioni non uniformi, Omotetie, Simmetrie (oblique). Glissosimmetrie. Elementi uniti.

Piano euclideo e trasformazioni. Trasformazioni ortogonali: rotazioni e simmetrie assiali ortogonali: caratterizzazione attraverso l'azione della *matrice portante*. Similitudini. Elementi uniti.

Forme bilineari. Forme bilineari e matrici. Relazione di congruenza. Forme bilineari simmetriche. Forme quadratiche.

Coniche e quadriche. Generalità sulle curve. Vettore tangente e vettore normale. Piano affine ampliato con i punti impropri. Coordinate omogenee. Coniche: classificazione proiettiva (coniche degeneri e coniche generali); intersezione con la retta impropria e classificazione affine (parabole, ellissi, iperboli); classificazione metrica (tramite fuochi e direttrice). Centro, vertici, direttrice, assi, asintoti e fuochi.
Forme canoniche affini e forme canoniche metriche. Traslazioni, rotazioni e riflessioni del riferimento e loro effetto sull'equazione di una conica. Processo di riduzione in forma canonica metrica (sia con un esplicito cambiamento di coordinate, che con il *metodo degli invarianti*).
Generalità sulle superfici. Coni e Cilindri. Cenni sulle quadriche: classificazione, forme canoniche. Equazione generica della sfera e analogia con la circonferenza. Piano tangente.

Applicazioni e complementi. Coniche in forma polare. Moti centrali. Eccentricità ed energia. Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenei: risoluzione attraverso processi di diagonalizzazione o di riduzione in forma canonica di Jordan per tramite di *autovettori generalizzati*.

Testi consigliati:

A. Vietri:

Itinerario di geometria e algebra lineare, ed. CISU.

S. Capparelli, A. Del Fra:

Geometria, ed. Esculapio.

S. Capparelli, A. Del Fra:

Esercizi di Geometria, ed. Esculapio. A.

Mario Landucci:

N esercizi svolti di Geometria e Algebra Lineare, Ed. LaDotta

L. Grenié - M. Pedroni:

Esercizi di Geometria e Algebra Lineare, Ed. LaDotta

Enrico Schlesinger:

Algebra lineare e geometria, Ed. Zanichelli