

7

2145/22

Prof. Ing. ARISTIDE GIANNELLI

# MODERNE TEORIE SUL CEMENTO ARMATO

(Lezione del " Corso sulla Tecnica del Cemento Armato,,  
tenuta nel Maggio 1943 presso l'Istituto Nazionale per  
gli Studi e la Sperimentazione nell'Industria Edilizia)



ROMA — TIPOGRAFIA FAUSTO FAILLI — 1944

Prof. Ing. ARISTIDE GIANNELLI

# **MODERNE TEORIE SUL CEMENTO ARMATO**

(Lezione del " Corso sulla Tecnica del Cemento Armato,,  
tenuta nel Maggio 1943 presso l'Istituto Nazionale per  
gli Studi e la Sperimentazione nell'Industria Edilizia)

ROMA — TIPOGRAFIA FAUSTO FAILLI — 1944

## MODERNE TEORIE SUL CEMENTO ARMATO

Prof. Ing. ARISTIDE GIANNELLI

La questione dei metodi di calcolo del cemento armato è antica quanto l'origine stessa di questo tipo di struttura mista. Le difficoltà di esprimere in modo semplice e razionale le leggi di sollecitazione e di deformazione di un sistema costruttivo, in cui le proprietà del conglomerato di cemento e dell'acciaio e l'aderenza fra i due materiali hanno decisiva importanza, condussero infatti ad una *teoria ufficiale, internazionale*, fondata sulla estensione dei metodi in uso per i materiali omogenei ed isotropi. È nata così, e si è successivamente perfezionata ed affermata coll'esperienza, *la teoria regolamentare* tuttora sostenuta e difesa da molti autorevoli cultori della materia, fondata come è noto sulla equivalenza delle sezioni ridotte omogenee, costituite dal conglomerato compresso e dalle aree metalliche affette dal coefficiente  $n$ , eguale al rapporto dei moduli di elasticità dei materiali, prescindendo completamente dal conglomerato teso. Non vi è dubbio che tale teoria, i cui risultati pratici sono stati per molto tempo soddisfacenti, ha presentato e presenta tuttora molto interesse per la semplicità con cui permette di estendere alle sezioni miste i calcoli di resistenza e di progetto per le diverse sollecitazioni semplici e composte; non può dirsi tuttavia che essa possa considerarsi come la soluzione più perfetta del problema, essendo ben lontana dal rappresentare il vero stato di tensione delle strutture miste, costituite di materiali che già sotto carichi moderati non seguono come è noto la legge di Hooke.

Le discussioni sulla sicurezza, sulle proprietà fisiche e meccaniche dei materiali, sull'inizio delle lesioni e sui procedimenti per evitarle od almeno ritardarle, riprese con maggiore interesse dopo la prima guerra mondiale e

successivamente ai congressi internazionali del 1932 (Liegi) e 1936 (Berlino) dettero origine a più insistenti proposte di modifica e di sostituzione del metodo regolamentare, ossia del così detto *metodo  $n$* . Il significato puramente fittizio delle *tensioni ammissibili* (o carichi di sicurezza del conglomerato e dell'acciaio), il valore convenzionale del rapporto  $n$ , così diverso nei regolamenti delle varie Nazioni (da 6 a 25), la necessità di due differenti gradi di sicurezza in luogo di un *grado di sicurezza unico* della struttura mista, orientano oggi sempre più molti tecnici verso il *calcolo a rottura*, con un ben definito unico grado di sicurezza, rapporto fra la caratteristica di sollecitazione di rottura e quella di esercizio. È chiaro che al momento in cui si manifesta la rottura non si può rimanere soddisfatti della estrapolazione forzata di formule dedotte in regime rigorosamente elastico, quando nelle strutture sono già apparse più o meno estese e diffuse soluzioni di continuità, accompagnate dallo snervamento dell'acciaio e da schiacciamento del conglomerato compresso. La conoscenza sempre più progredita della plasticità dei materiali e le ormai numerose esperienze di laboratorio e di cantiere lasciano infatti intravedere la possibilità di teorie più aderenti alla realtà fisica dei fenomeni.

Per i pilastri ed in genere per strutture soggette a *semplice pressione* (assiale), già il Regolamento tedesco del 1932 ammette un calcolo basato sulla formula di rottura, in cui il numero  $n$  ha perduto il significato di rapporto di moduli di elasticità. Se il conglomerato compresso raggiunge il carico di rottura  $\sigma_c$ , mentre il ferro è ancora in regime di snervamento con tensione costante  $\sigma_s$ , il carico totale massimo che il pilastro può sop-

portare, prima di schiacciarsi, è infatti necessariamente:

$$(1) \quad N \max = \sigma_c A_c + \sigma_s A_f = \sigma_c (A_c + n A_f)$$

in cui

$$n = \frac{\sigma_s}{\sigma_c}$$

è un rapporto di tensioni anziché di moduli di elasticità; la formula tien conto implicitamente della staffatura senza la quale le tensioni  $\sigma_c$  e  $\sigma_s$  non possono essere raggiunte.

Dalla (1) si deduce la formula di stabilità, dividendo il carico totale massimo di rottura per il grado di sicurezza  $s$ ; si ha così il carico totale di esercizio:

$$(2) \quad N = \frac{N \max}{s} = \frac{\sigma_c}{s} (A_c + n A_f) = \\ = \frac{\sigma_c}{s} A_c + \frac{\sigma_f}{s} A_f,$$

in cui  $\frac{\sigma_c}{s}$ ,  $\frac{\sigma_s}{s}$  possono ancora considerarsi come tensioni ammissibili, ma non corrispondono affatto alle tensioni sotto il carico totale di esercizio.

In modo analogo possono stabilirsi le formule di resistenza dei pilastri cerchiati.

Per la *flessione semplice* i fenomeni da considerare per dedurre le formule di stabilità e di rottura delle strutture miste sono naturalmente più complessi. Esaminiamo, per semplicità, il comportamento di una trave di sezione rettangolare armata soltanto in zona tesa, appoggiata agli estremi e caricata con due pesi uguali gradualmente crescenti applicati in due sezioni simmetricamente poste rispetto alle estremità.

Numerose esperienze eseguite dai più autorevoli sperimentatori e da Commissioni permettono oggi una completa analisi delle varie fasi della prova. Si devono distinguere come di solito, tre stadi:

*I Stadio.* — Sotto carichi bassi la struttura segue rigorosamente la legge di Hooke, le sezioni del tratto soggetto a flessione semplice si conservano piane, le deformazioni del conglomerato e dell'acciaio sono proporzionali, ed in virtù dell'aderenza sono identiche alla stessa distanza dell'asse neutro.

Valgono le leggi di elasticità ( $E_f$ ,  $E_c$  sono costanti):

$$(3) \quad \sigma_f = E_f \varepsilon_f, \quad \sigma_c = E_c \varepsilon_c; \quad \sigma_f = n \sigma_c$$

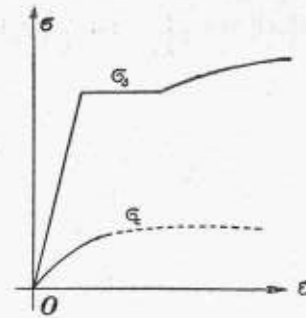


Fig. 1.

vale la legge di equivalenza  $\omega_f = n \omega_c$ . Con le notazioni della fig. 2 risultano allora

$$(4) \quad \sigma_f \omega_f + \frac{\sigma_c b (h-y)}{2} = \frac{\sigma_c b y}{2}$$

e poichè  $\sigma_f = \sigma_c \frac{h-y}{y}$ , posto  $\omega_f = \gamma b h$

si ottiene:

$$y = \frac{h}{2} \frac{2 \gamma \sigma_f + \sigma_f}{\gamma \sigma_f + \sigma_f}$$

*II Stadio.* — Ben presto il limite in cui il conglomerato teso non segue più la legge di Hooke è raggiunto e superato;  $\varepsilon = \frac{0,5 \div 0,8}{10.000}$  corrisponde al limite di snervamento  $\sigma_s$ , assai prossimo al limite di rottura. Non vale

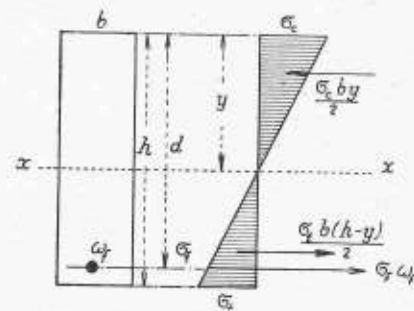


Fig. 2.

più allora la legge di elasticità  $\sigma_c = E_c \varepsilon$ , ma quella di plasticità  $\sigma_c = \text{cost}$ , ciò che equivale ad un graduale abbassamento del modulo  $E_c$ . Il conglomerato teso acquista una sempre maggiore *estensibilità* presso l'armatura tesa. A partire dal lembo la zona plastica si estende sempre più verso l'asse neutro, mentre il conglomerato compresso e l'acciaio continuano a deformarsi elasticamente. I diagrammi delle



tensioni mutano come indicano le figure 3, finchè tutta la zona tesa è sollecitata a tensione costante  $\sigma_t$ . A questo punto appaiono le prime lesioni (fine del primo periodo dello stadio II).

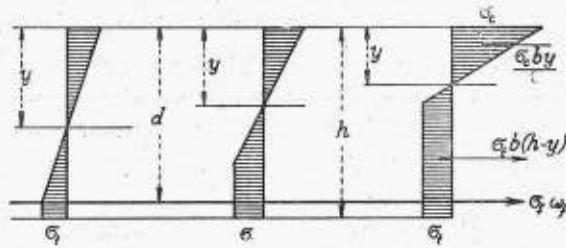


Fig. 3.

La trave si inflette tuttavia ancora elasticamente perchè l'effetto della plasticità locale del conglomerato teso non influisce sensibilmente sulla deformazione globale. L'asse neutro sale gradualmente verso il lembo compresso; alla fine del 1° periodo del II stadio valgono le formule:

$$(5) \quad \frac{\sigma_c b y}{2} = \sigma_t \omega_f + \sigma_c b (h - y), \quad \sigma_c = n \sigma_t \frac{d - y}{y};$$

nelle quali si può porre  $\omega_f = \gamma b h$ ,  $d = \lambda h$ ,  $y = k h$  —

Alla fine del primo periodo dello stadio II, caratterizzato dall'inizio delle lesioni, le tensioni sono le seguenti:

nel conglomerato teso,  $\sigma_t$  = carico di snervamento di pochissimo inferiore al carico di rottura per trazione. Si osserva che l'armatura metallica colla sua maggiore diffusione e forma di superficie (rugosità ecc.) può facilitare una maggiore estensibilità del conglomerato e ritardare quindi il formarsi di lesioni, ma non può affatto aumentarne la resistenza  $\sigma_t$ ;

nell'armatura tesa,  $\sigma_c$  è molto variabile; da 6 a 15 kg/mm<sup>2</sup> ed anche minore di 6 kg/mm<sup>2</sup> negli acciai dolci, da 16 a 18 kg/mm<sup>2</sup> negli acciai speciali (valori dedotti col calcolo, maggiori dal 50 al 100% di quelli misurati sperimentalmente). Secondo Saliger (1) l'esperienza darebbe:

$$(6) \quad \sigma_c = \sigma_p \left( 1 + \frac{0,035}{\gamma} \right) = \sigma_c \left( 6 + \frac{0,21}{\gamma} \right),$$

essendo  $\gamma = \frac{\omega_f}{b h}$ ,  $\sigma_p$  il carico prismatico di schiacciamento  $c.8 \sigma_c$  (carico cubico);

nel conglomerato compresso,  $\sigma_c$  al lembo è un multiplo di  $\sigma_t$ , eguale circa a 2 per armature

metalliche di acciaio normale, a 3 per armature di acciaio speciale.

Nel secondo periodo dello stadio II la trave è visibilmente lesionata, il conglomerato interviene sempre meno nella resistenza a trazione, le lesioni si aprono e progrediscono verso l'asse neutro, la zona compressa si restringe sempre più verso il lembo con pressioni unitarie sempre maggiori. Anche nell'acciaio le tensioni aumentano verso lo snervamento, ma gli allungamenti sono ancora sensibilmente proporzionali; così pure le frecce globali della trave, nonostante il progredire delle lesioni. Alla fine del secondo periodo l'acciaio ha raggiunto generalmente il suo carico di snervamento  $\sigma_s$ ; ora le lesioni cominciano ad allargarsi notevolmente, le deformazioni non sono più proporzionali e le frecce crescono più rapidamente del carico; si inizia il fenomeno della rottura (stadio III). Questo è il caso più comune di travi armate con l'acciaio strettamente necessario ( $\gamma$  debole), costituite con conglomerato ottimo, per cui risulta decisivo per la rottura lo snervamento dell'armatura, che si manifesta per primo.

In questo caso nello stadio III, mentre l'allungamento dell'acciaio cresce con  $\sigma_s = \text{cost}$ , la zona compressa si restringe sempre più ed il conglomerato entra in plasticità finchè si rompe per schiacciamento quando  $\sigma = \sigma_p$  (carico prismatico) ovvero  $\sigma = \sigma_c$  (carico cubico).

Può anche darsi che il conglomerato resista tanto da permettere all'acciaio di superare il periodo di snervamento e raggiungere un  $\sigma_t > \sigma_s$ . Nel caso più comune di  $\gamma$  debole, al momento della rottura (fine del III stadio) si hanno quindi nel conglomerato  $\sigma_p$  ovvero  $\sigma_c$ , e nello acciaio  $\sigma_t \approx \sigma_s$ , secondo il tipo di trave.

Nel caso meno comune di travi fortemente armate ( $\gamma$  forte), ovvero costituite da conglomerato mediocre od insufficiente, alla fine dello stadio II non si raggiunge nell'acciaio il carico di snervamento, perchè il conglomerato cede per primo (raggiungendo  $\sigma_c$  ovvero  $\sigma_p$ ) ed entra in plasticità e si schiaccia mentre è ancora  $\sigma_t < \sigma_s$ . L'acciaio può però ancora talvolta raggiungere  $\sigma_s$  prima che avvenga lo schiacciamento della zona compressa ed il momento flettente decresca.

In entrambi i casi in definitiva la rottura è sempre determinata, o direttamente ( $\gamma$  debole) o indirettamente ( $\gamma$  forte) dal conglome-

(1) SALIGER, *Der Eisenbeton*, 6ª ediz., pag. 165.  
SALIGER, *II Congresso dell'Associaz. Internaz. di Pavia e Costruzioni.* Berlino-Monaco 1936) pag. 313.

rato, che costituisce la causa principale e finale del crollo sotto il *momento flettente massimo* raggiunto durante la prova. Rotture di travi inflesse per strappamento dei ferri di armatura senza schiacciamento del conglomerato sono rarissime, e possono avvenire solo per  $\gamma$  debolissimi.

Nel caso di  $\gamma$  debole poi può rimanere, durante il III stadio,  $\sigma_f = \sigma_s$  costante (acciaio a snervamento ben definito) finché il conglomerato raggiunge la completa plasticità; poi  $\sigma_f$  cresce ancora, oltrepassato il periodo di snervamento e la trave si rompe con  $\sigma_f > \sigma_s$ . Con acciai speciali invece, poichè il periodo di snervamento si riduce ad un punto, e  $\sigma_f$  cresce immediatamente, alla rottura si ha sempre  $\sigma_f > \sigma_s$ .

Alla fine dello stadio III (rottura), le tensioni sono dunque:

*nel conglomerato teso*, nonostante le lesioni, si ha ancora una certa zona più o meno estesa con  $\sigma = \sigma_t$ ; le lesioni infatti non salgono mai fino all'asse neutro né attraversano tutta la trave; questa zona si può considerare corrispondente ad  $1/3$  dell'altezza della trave sotto l'asse neutro;

*nelle armature tese*, nel caso comune di  $\gamma$  debole,  $\sigma_f = \sigma_s$  (snervamento) ovvero più generalmente  $\sigma_f > \sigma_s$ ; nel caso eccezionale di  $\gamma$  forte, per cui il processo di rottura si inizia nel conglomerato con  $\sigma_f < \sigma_s$ , alla rottura può ritenersi  $\sigma_f = \sigma_s$ ;

*nel conglomerato compresso*, nelle travi del primo tipo al principio della rottura  $\sigma_c$  è minore del carico di schiacciamento, ma lo raggiunge alla fine. Vi è divergenza fra i vari Autori sul valore di  $\sigma$  allo schiacciamento, che alcuni ritengono eguale al carico cubico  $\sigma_c$ , altri a quello prismatico  $\sigma_p$  (eguale a circa  $0,8 \sigma_c$ ); in verità potrebbe ammettersi l'uno o l'altro secondo che si tratti di travi piene o di travi sottili, tenendo conto di un certo effetto di cerchiatura delle fibre interne. Il Saliger tiene conto di questo effetto nel suo diagramma delle tensioni anche sull'altezza della sezione.

Al momento della rottura, col diagramma della fig. 4 si avrebbe per l'equilibrio interno:

$$(7) \quad \sigma_c b y = \frac{\sigma_t b (h-y)}{3} + \sigma_f \omega_f;$$

L'asse neutro risulta spostato verso il lembo compresso (con  $y = 1/10 \div 1/15 h$ ).

Ho creduto necessario ricordare la successione dei fenomeni che si verificano in una trave caricata fino a rottura, alla luce dei risultati delle numerose prove di laboratorio e di cantiere ormai acquisite sicuramente alla tecnica, per aver modo di discutere i fondamenti delle varie teorie sul calcolo delle strutture di cemento armato.

Quello che interessa principalmente è poi il *grado di sicurezza* raggiunto, più ancora delle effettive tensioni unitarie massime sotto il carico di esercizio. Interessa inoltre, nel caso specifico di strutture facili a lesionarsi, raggiungere un certo grado di sicurezza contro l'apparire prematuro di lesioni, non tollerabili affatto in speciali opere, ovvero in quelle (nella maggior parte) in cui non è possibile evitarle del tutto, da ritardare e contenere entro determinati limiti di numero e specialmente di larghezza.

Ciò premesso, vediamo ora come i vari metodi di calcolo rispondano alle suddette finalità pratiche.

Il *metodo regolamentare* si propone di dedurre le tensioni massime nel conglomerato e nel ferro sotto un dato momento flettente  $M$ .

Posto:

$$\sigma_f = n \sigma_c \frac{d-y}{y},$$

$$\omega_f = \gamma b d, \quad y = k d,$$

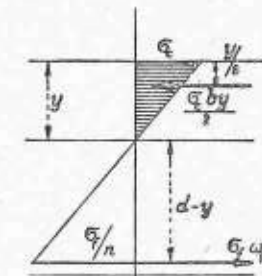


Fig. 5.

per l'equilibrio si hanno (trascurando il conglomerato teso e supponendo perfettamente elastici i materiali):

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\sigma_c b y}{2} = \sigma_f \cdot \omega_f \\ \frac{\sigma_c b y}{2} \left( d - \frac{y}{3} \right) = M \end{cases}$$

e cioè:

$$\frac{k \sigma_c}{2} = \gamma \sigma_f$$





Si deve obiettare che non è corretto conservare fissa la posizione dell'asse neutro determinata in periodo di perfetta elasticità; il metodo permette però di determinare il  $\gamma$  critico  $= \frac{\sigma_c k}{\sigma_f}$ , che separa i due campi di dominio del ferro e del conglomerato. Il Friedrich introduce la *tragfähigkeit*

$$T = \sigma_c + \frac{\sigma_f}{n} = \frac{M d}{I}$$

(in regime elastico), e posto  $\sigma_c = \sigma_p$ ,  $\sigma_f = \sigma_s$ ,

$\frac{\sigma_s}{\sigma_p} = \beta$  determina la

$$k \text{ critica} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(n+3\beta)}{3n+\beta}}$$

Il metodo ha base sperimentale (esso dà buoni risultati secondo Gehler nel campo di dominio del conglomerato).

*Metodi che prescindono dal numero n.* — Nei metodi precedentemente considerati viene sempre fatto uso del rapporto dei moduli  $n = \frac{E_f}{E_c}$  cercando di correggerne l'influenza specie nel secondo campo ( $\gamma$  forte). Volendo introdurre la perfetta plasticità conviene però prescindere

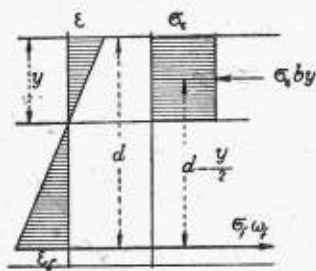


Fig. 8.

da tale numero, che in prossimità della rottura perde ogni significato. Ammessa la conservazione delle sezioni piane (1) e cioè:

$$(13) \text{ a) } \frac{y}{d} = k = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + \epsilon_f};$$

ammessa la perfetta elasticità del ferro e la plasticità del conglomerato compresso (s'intende nel campo di  $\gamma$  forte):

$$(14) \text{ (b) } \sigma_c = \sigma_r = \text{cost}, \sigma_f = E_f \epsilon_f;$$

prescindendo dal conglomerato teso, per l'equilibrio valgono le (12):

$$\sigma_f \gamma = \sigma_r k, \frac{M_r}{bd^2} = \sigma_r k \left(1 - \frac{k}{2}\right).$$

(1) vedi CRAEMER, in *Zement*, dicembre 1941.

Dati  $\sigma_r$ ,  $\epsilon_r$ , sperimentalmente a rottura, noto  $E_f = 20.000 \text{ kg/mm}^2$ , fissato  $\gamma$ , dalla:

$$(15) \quad \sigma_f = \frac{\sigma_r k}{\gamma} = \frac{\sigma_r}{\gamma} \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + \epsilon_f} = E_f \epsilon_f,$$

posto anche  $\frac{\sigma_f}{E_f \gamma} = \nu$ , si deduce:

$$(16) \quad \epsilon_f = \frac{\epsilon_r}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\nu}{\epsilon_r^2}}\right)$$

Determinato  $\epsilon_f$ , e quindi  $\sigma_f = E_f \epsilon_f$ , posto

$\beta = \frac{\sigma_f}{\sigma_r}$  si ottengono:

$$(17) \quad k = \frac{\sigma_f \gamma}{\sigma_r} = \gamma \beta, \frac{M_r}{bd^2} = \sigma_r \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right) = \sigma_r k \left(1 - \frac{k}{2}\right).$$

Si può anche fissare  $\sigma_f$ , e dedurre  $\epsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f}$  e quindi:

$$(18) \quad \begin{cases} \gamma = \frac{\sigma_r}{\sigma_f} \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + \epsilon_f}, k = \beta \gamma, \\ \frac{M_r}{bd^2} = \sigma_f \gamma \left(1 - \frac{k}{2}\right) \end{cases}$$

Molto delicata è evidentemente la misura di  $\sigma_f$ ,  $\epsilon_f$ ; occorre inoltre che  $\sigma_f$  risulti compreso nei limiti elastici.

Sui principi ora esposti sono basati i metodi di *Bittner* (1), *Brantzeg*, *Saliger*; i quali differiscono fra loro solo per la forma dei diagrammi in compressione assunti a base della teoria.

Si ammette in tutti la linearità della deformazione:

$$(19) \quad y = kd, \quad k = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_f};$$

si prescinde dalla resistenza a trazione del conglomerato  $\sigma_t$ ; si ammette a rottura  $\sigma_c = \sigma_p$  (carico prismatico eguale a 0,75 del carico cubico); e per il ferro  $\sigma_f = \sigma_s$  (snervamento) ovvero  $\sigma_f = \alpha \sigma_s$  con  $\alpha > 1$ .

Nel metodo di *Bittner* (come in quello di *Brantzeg*) il diagramma assunto è quello della fig. 9, con  $\sigma_p$  costante dal lembo fino alle fibre per cui  $\epsilon_c = 1,5 \%$ , variabile poi con legge parabolica fino all'asse neutro.

(1) BITTNER, *Zur Klärung der n - Frage bei Eisenbetonbalken*, in *Beton und Eisen*, 1936.



Si hanno allora :

$$(20) \quad \begin{cases} \theta \sigma_{\mu} b y = \sigma_l \omega_l \\ \theta \sigma_{\mu} b y (d - \psi y) = M_r ; \end{cases}$$

ovvero :

$$(21) \quad \theta \sigma_{\mu} k = \gamma \sigma_l , \quad \frac{M_r}{bd^2} = \gamma \sigma_l (1 - \psi k)$$

posto  $\frac{\psi}{\theta} = 0,5$  ,  $\frac{\sigma_l}{\sigma_r} = \beta$  , e quindi  $\frac{\sigma_l}{\sigma_y} = \frac{\beta}{0,75}$  ,

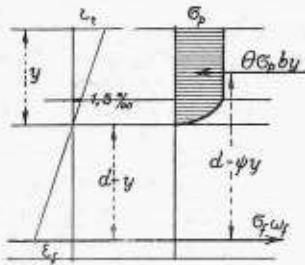


Fig. 9.

si deduce in questo caso :

$$(22) \quad \frac{M_r}{bd^2} = \gamma \sigma_l (1 - 0,67 \beta \gamma).$$

Nel metodo *Saliger* il diagramma assunto, in base ad esperienze, è quello della fig. 10, per cui risultano :

$$\theta = 0,8 \div 0,9 = 0,85$$

$$\psi = \frac{\theta}{2} , \quad \beta = \frac{\sigma_l}{\sigma_{\mu}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\mu}}$$

con  $\sigma_l = \sigma_s$  (snervamento) ; e quindi :

$$(23) \quad \begin{cases} \gamma \sigma_s = \theta k \sigma_{\mu} \\ \frac{M_r}{bd^2} = \gamma \sigma_l (1 - 0,5 \beta \gamma) , \end{cases}$$

quando sia, s'intende,  $\sigma_l \leq \sigma_s$ .

Nel caso poi, in cui alla rottura si raggiungono

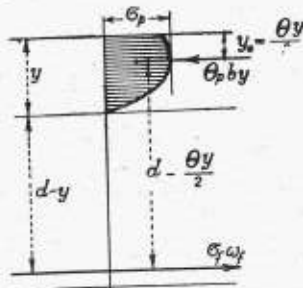


Fig. 10.

valori di  $\sigma_l = \alpha \sigma_s > \sigma_s$ , cioè sia  $\alpha > 1$ , ponendo

$$\beta = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\mu}} \text{ e cioè :}$$

$\beta = \alpha \beta_s$ , la (23) diviene :

$$(24) \quad \frac{M_r}{bd^2} = \alpha \gamma \sigma_s (1 - 0,5 \alpha \gamma \beta_s) ,$$

si ha allora  $\alpha = a + \frac{b}{\gamma \beta_s}$  ed i coefficienti numerici  $a$  e  $b$  sono variabili con la qualità dell'acciaio ( $a = 0,90 \div 0,93$  ;  $b = 0,030 \div 0,035$  per  $\alpha \beta_s$  variabile entro determinati limiti da  $0,07 \div 0,30$  a  $0,1 \div 0,6$ ).

Anche in queste formole del Saliger vanno sempre distinti due casi e cioè quello in cui  $\gamma$  è molto debole ( $\sigma_l \geq \sigma_s$ ,  $\alpha \geq 1$ ) e quello in cui  $\gamma$  è più forte ( $\sigma_l = \sigma_s$  al momento della rottura) ; il diagramma  $(\gamma, \frac{M_r}{bd^2})$  risulta però sempre continuo.

Il metodo *Steuermann* (1,2) fissa con precisione le tensioni dei materiali al momento della rottura, togliendo quindi ogni dubbio sul modo di descrivere il diagramma (fig. 11).

A tale riguardo pone le seguenti ipotesi :

a) diagramma di compressione triangolare con pressione massima al lembo  $\sigma_c$  eguale al

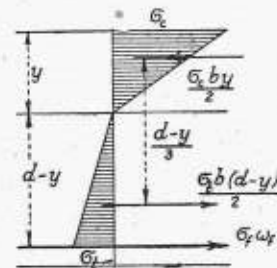


Fig. 11.

carico cubico di schiacciamento del conglomerato (il valore medio  $\sigma_m$  è quindi eguale a  $\frac{\sigma_c}{2}$ ) ;

b) tensione nei ferri  $\sigma_l = \sigma_s$  (snervamento del ferro teso) ;

c) diagramma triangolare di trazione del conglomerato, con tensione massima  $\sigma_t$  in corrispondenza al ferro teso, eguale ad un valore convenzionale ( $\sigma_t = \sqrt{\sigma_c}$  espresso in  $\text{kg/cm}^2$ , ovvero ad una quota parte  $\alpha \sigma_c$ ) corrispondente alla massima tensione di snervamento per trazione.

Con tale diagramma si vuol tener conto anche di una eventuale *auto-tensione dei ferri* gene-

(1) STEUERMANN, *Das Widerstands moment eines Eisenbeton Querschnittes*, in *Beton und Eisen*, 1933.

(2) MARTINELLI A., *Su un nuovo metodo di calcolo del cemento armato*, in *Industria Italiana del Cemento*, 1937.

rata dal ritiro del conglomerato senza alzare il  $\sigma_t$  al di sopra dello snervamento. Le formole che derivano dalle ipotesi precedenti sono generali sia per  $\gamma$  debole sia per  $\gamma$  forte, e sono fondate sull'osservazione che in ogni caso è sempre il conglomerato che determina finalmente il crollo della struttura, dopo che  $\sigma_t$  ha raggiunto o superato  $\sigma_s$  ( $\gamma$  debole), ovvero mentre  $\sigma_t$  si avvicina a  $\sigma_s$  ( $\gamma$  forte), e quando il conglomerato raggiunge il carico di rottura a compressione, senza che il momento massimo raggiunto nella prova aumenti più sensibilmente.

In sostanza il diagramma è arbitrario, ma con esso si vuol tener conto di tutti gli elementi di resistenza che entrano in gioco alla rottura.

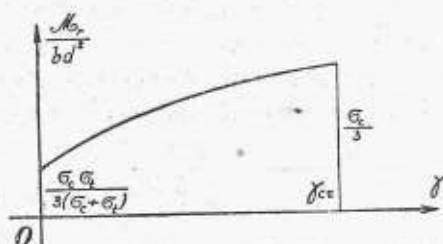


Fig. 12.

Amnesso il diagramma (fig. 10) si deducono per l'equilibrio:

$$(25) \quad \frac{\sigma_c b y}{2} = \frac{\sigma_c b (d - y)}{2} + \sigma_t \omega_t,$$

e posti, come di solito:

$$(26) \quad \begin{aligned} y &= kd, \quad \omega_t = \gamma bd, \\ \sigma_c k &= \sigma_c (1 - k) + 2 \sigma_t \gamma \end{aligned}$$

da cui si deducono:

$$(27) \quad \begin{aligned} k &= \frac{\sigma_t + 2 \sigma_t \gamma}{\sigma_c + \sigma_t} \\ \frac{M_r}{bd^2} &= \frac{\sigma_c k^2}{3} + \frac{\sigma_c (1 - k)^2}{3} + \sigma_t \gamma (1 - k) = \\ &= \frac{\sigma_c (\sigma_t + 3 \gamma \sigma_t) - 2 \gamma^2 \sigma_t^2}{3 (\sigma_c + \sigma_t)} \end{aligned}$$

Nel piano cartesiano  $(\gamma, \frac{M_r}{bd^2})$  (fig. 12)

$$\text{per } \gamma = 0, \quad k = \frac{\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}, \quad \frac{M_r}{bd^2} = \frac{\sigma_c \sigma_t}{3 (\sigma_c + \sigma_t)};$$

$$\text{per } \gamma_{cr} = \frac{\sigma_c}{2 \sigma_t}, \quad k = 1, \quad \frac{M_r}{bd^2} = \frac{\sigma_c}{3},$$

caso limite teorico per cui dovrebbe essere  $y = d$ , e cioè l'asse neutro coincidente coll'arma-

tura tesa; per  $\gamma > \gamma_{cr}$  le formole non hanno più alcun significato.

Il valore di  $\sigma_t$  è soltanto convenzionale, e lo Steuermann propone due soluzioni,  $\sigma_t = \sqrt{\sigma_c}$  ovvero  $\sigma_t = \alpha \sigma_c$ .

Adottando la seconda, e ponendo inoltre  $\sigma_t = \beta \sigma_c$ , le formole (27) divengono:

$$(28) \quad \begin{aligned} k &= \frac{\alpha + 2 \beta \gamma}{1 + \alpha}, \quad \frac{M_r}{bd^2} = \\ &= \sigma_c \frac{\alpha + 3 \beta \gamma - 2 \beta^2 \gamma^2}{3 (1 + \alpha)} = \sigma_t \frac{\alpha + 3 \beta \gamma - 2 \beta^2 \gamma^2}{3 \beta (1 + \alpha)} \end{aligned}$$

Questo metodo è integrato da calcoli relativi alle sezioni a  $T$  ed alle sollecitazioni di taglio, di pressione assiale e di pressione eccentrica.

Per la *pressione assiale* si considera nel modo solito già sopra ricordato, il carico totale massimo di rottura  $(\omega_t = \gamma bh, \beta = \frac{\sigma_s}{\sigma_p})$ :

$$(29) \quad \begin{aligned} N_r &= \sigma_c A_c + \sigma_s A_t = \sigma_p b h + \sigma_t \omega_t = \\ &= \sigma_p b h (1 + \gamma \beta). \end{aligned}$$

Per il *taglio*, si estendono i metodi ordinari della teoria approssimata del taglio dei solidi omogenei.

Per la *pressione eccentrica*, i criteri seguiti sono alquanto arbitrari, ma originali, e si basano sulla sovrapposizione degli effetti in regime plastico, o meglio sulla somma delle resistenze a rottura delle varie parti del solido.

Considerando un pilastro di sezione rettangolare  $bh$ , di solo conglomerato sollecitato a pressione e flessione (pressione eccentrica):

$$M, N, \frac{M}{N} = e,$$

essendo  $\sigma_p$  e  $\sigma_t = \sqrt{\sigma_p} = \alpha \sigma_p$ , rispettivamente il carico prismatico di schiacciamento ed il carico massimo a trazione, poichè lo sforzo normale  $N$  genera una pressione uniforme  $\sigma_m = \frac{N}{bh}$ , alla rottura restano disponibili ancora per la resistenza,

$$\begin{aligned} \text{al lembo compresso. . . . .} & \sigma_p - \sigma_m \\ \text{al lembo teso . . . . .} & \sigma_t + \sigma_m \end{aligned}$$

Se  $\sigma_p - \sigma_m = \sigma_t + \sigma_m$ , e cioè  $\sigma_m = \frac{\sigma_p - \sigma_t}{2}$ , si può sovrapporre allo sforzo assiale  $N$  il momento flettente:

$$(30) \quad M_o = \frac{bh^2}{6} (\sigma_p - \sigma_m) = \frac{bh^2}{6} (\sigma_t + \sigma_m)$$

In tal modo si raggiungono col momento  $M_0$  e lo sforzo  $N$  contemporaneamente ai lembi le tensioni massime ammissibili a rottura  $\sigma_p$  e  $\sigma_t$ .

Qualora il momento flettente  $M$  sia  $> M_0$ , occorre aggiungere un'armatura metallica simmetrica  $\omega_f$ , tale che sia ( $\sigma_t = \sigma_c$ ):

$$\sigma_t \omega_f 0,9 h = M - M_0$$

supposto il braccio delle armature  $\omega_f$  eguale a  $0,9 h$  (fig. 13).

In generale è però  $\sigma_m = \frac{N}{bh} \leq \frac{\sigma_p - \sigma_t}{2}$  e quindi occorrono altre armature tese ovvero armature compresse.

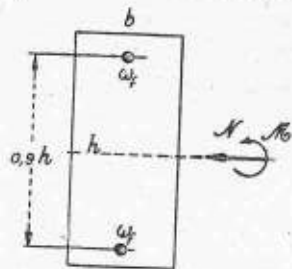


Fig. 13.

Nel primo caso:

$$\sigma_m = \frac{N}{bh} < \frac{\sigma_p - \sigma_t}{2}$$

e cioè:

$$\sigma_t + \frac{N}{bh} < \sigma_p - \frac{N}{bh}$$

in questo caso oltre allo sforzo assiale  $N$ ,

si può applicare senza armature metalliche il momento:

$$(31) \quad M_1 = \left( \frac{N}{bh} + \sigma_t \right) \frac{bh^2}{6}$$

si esaurisce così la resistenza del conglomerato in trazione, mentre in compressione è ancora disponibile

$$(32) \quad \Delta \sigma_p = \sigma_p - \frac{N}{bh} - \left( \frac{N}{bh} + \sigma_t \right) = \sigma_p - \sigma_t - 2 \sigma_m$$

Volendo utilizzare completamente  $\Delta \sigma_p$ , essendo ormai esaurita tutta la resistenza a trazione, si dovrà porre in trazione un'armatura dissimetrica corrispondente al  $\gamma$  critico  $= \frac{\Delta \sigma_p}{2 \sigma_t}$ ;

in tal caso il modulo della sezione è  $\frac{bd^3}{3}$  (diagramma triangolare esteso fino al ferro), e quindi il momento flettente assorbito è:

$$(33) \quad \Delta M_1 = \frac{bd^3}{3} \Delta \sigma_p \text{ con } \omega_{t1} = \gamma_c bh$$

Ora, se il momento flettente  $M$  è  $> M_1 + \Delta M_1$ , la differenza  $M - (M_1 + \Delta M_1)$  dovrà farsi assorbire da armature simmetriche  $\omega_f = \gamma bh$ , tali che sia:

$$(34) \quad M - (M_1 + \Delta M_1) = \gamma bh \sigma_t 0,9 h = 0,9 \gamma \sigma_t bh^2$$

Se invece è  $M < M_1 + \Delta M_1$ , ma  $M > M_1$ , cioè se non è utilizzato completamente  $\sigma_p$ , per la differenza  $M - M_1 < \Delta M_1$ , si potrà porre:

$$(35) \quad M - M_1 = \frac{3 \beta \gamma_t - 2 \beta^2 \gamma_t^2}{3} bd^2 \Delta \sigma_p$$

con  $\alpha = 0$  e  $\beta = \frac{\sigma_t}{\Delta \sigma_p}$ , da cui noto  $b$  e

$d = 0,95 h$ , ed  $M - M_1$ , si ottiene  $\beta \gamma_t$  e quindi  $\gamma_t = \frac{(\beta \gamma_t) \sigma_t}{\Delta \sigma_p}$ .

Analogamente si procede se si deve rafforzare la zona compressa con armature dissimetriche.

Un metodo esclusivamente sperimentale è quello del *Maillard*, basato su di un grafico in cui sono riportati i risultati di tutti gli esperimenti su travi armate di sezione rettangolare, conosciuti fino ad ora. Il diagramma medio nel piano  $(\gamma \beta, \frac{M_r}{\sigma_c bd^2})$  è sensibilmente parabolico:

con  $\beta = \frac{\sigma_s}{\sigma_c}$ ,  $\gamma \beta = \gamma \frac{\sigma_s}{\sigma_c}$ , si ottiene:

$$(36) \quad \frac{M_r}{bd^2} = \sigma_c \gamma \beta \left( \frac{7}{6} - \gamma \beta \right) = \sigma_s \gamma \left( \frac{7}{6} - \gamma \beta \right)$$

Il *Guerrin* (1), che fa una rassegna generale assai dettagliata dei diversi metodi, con speciale riguardo alle sezioni rettangolari sottili (lastre e tubi), in cui non può prescindere dalla differenza fra  $d$  ed  $h$  ed occorre introdurre perciò

una nuova variabile  $\frac{d}{h} = 2/3 \div 1/2$ , propone

una modifica del metodo dello *Steuermann*, prolungando il diagramma triangolare di trazione fino al lembo teso, con che si cerca di correggere le differenze in difetto, che il metodo *Steuermann* dà in tali casi rispetto ai momenti di rottura  $M_r$  dedotti sperimentalmente.

In generale per tutti i metodi il *Guerrin* trova (costruendo i diagrammi grafici di errore) che i risultati sono approssimati più o meno per difetto. Egli propone perciò per le lastre sottili e per i tubi un suo metodo basato su di un nuovo diagramma ottenuto come somma di

(1) A. GUERRIN, *Les théories nouvelles de la flexion dans les pièces en béton armé. Essai et calculs*, Paris, Dunod, 1941.

quello che si può adottare all'inizio delle lesioni e di quello di rottura in regime plastico.

Tale somma è in realtà del tutto arbitraria; ma i risultati così ottenuti paiono più approssimati. Da tale diagramma (fig. 14) si deduce una formula assai più complessa del momento totale di rottura  $M_r$ , che l'Autore ritiene parti-

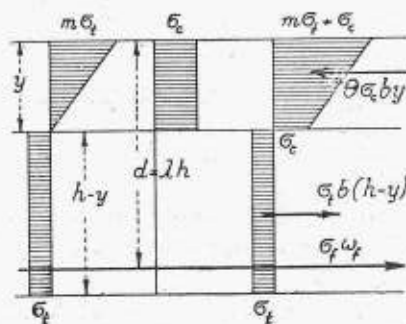


Fig. 14.

colarmente appropriata per tubi con pareti sottili:

$$(37) \frac{M_r}{bh^2} = \sigma_f \gamma \left( \lambda - \frac{1}{2} \gamma \beta \right) + \sigma_c (a + b \gamma - c \gamma^2)$$

nella quale sono  $\lambda = \frac{d}{h}$ ,  $\beta = \frac{\sigma_c}{\sigma_f}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  coefficienti numerici sperimentalmente determinati nei vari casi di travi o tubi con diverso tipo di armatura metallica.

Limitatamente alle sezioni rettangolari inflesse il Guerrin fa anche un confronto generale dei risultati che si ottengono con i diversi metodi suesposti calcolando le travi fino ad ora sperimentate da Commissioni o da Autori singoli: da esso risultano come più approssimati ai risultati sperimentali i metodi Maillard, Steuermann modificato e Guerrin. Per contro i diagrammi relativi posti a base dei calcoli in questi metodi, eccetto il primo (che non fa ipotesi sul diagramma delle tensioni), sono arbitrari e in disaccordo con i fenomeni che si riscontrano al momento della rottura. Sotto questo punto di vista sono invece più razionali i metodi Bittner, Brantzeg e Saliger ed il metodo plastico ed elastico plastico (Colonnetti), che prescindono i primi tre dal numero  $n$ , mentre gli ultimi due lo assumono come nel metodo regolamentare; per avere una più spinta approssimazione occorre però mettere in conto oltre al  $\sigma_b$  o  $\sigma_c$  (carichi prismatico e cubico del conglomerato) ed al  $\sigma_f \geq \sigma_c$  (sneramento dell'acciaio), anche una certa resistenza a trazione  $\sigma_t$  del conglomerato.

Determinato  $M$ , con uno qualunque dei metodi di calcolo a rottura sopradescritti, è appena necessario ricordare che il momento di esercizio si deduce dividendo  $M_r$  per il grado di sicurezza  $s$  richiesto per la struttura mista (generalmente assunto uguale a 2 qualunque sia  $\gamma$ ) Per tutti si deducono così le formole di calcolo del tipo:

$$(38) d = r \sqrt{\frac{M_r}{s b}} = r \sqrt{\frac{M}{b}}, \quad \omega_f = \gamma b d:$$

in cui  $\gamma$  è dato, ed  $r$  è funzione di  $(\beta, \lambda, \sigma_c, \sigma_f, \sigma_t)$ .

Riassunti così brevemente i principi fondamentali delle nuove teorie sul cemento armato, suggerite dal perfezionamento della tecnica e dalla necessità sempre maggiore di una più completa e spinta utilizzazione delle proprietà dei materiali, conviene fermarsi un momento ed esaminare l'opportunità di abbandonare il vecchio metodo regolamentare, ancor oggi prescritto dalle norme di quasi tutte le nazioni del mondo. Gli appunti che si muovono a tale metodo sono essenzialmente i seguenti:

a) il vecchio metodo pone a base di tutta la teoria un coefficiente numerico  $n = \frac{E_f}{E_c}$  rapporto di moduli elastici, che non ha alcun significato al momento della rottura;

b) questo numero, assai incerto, variabile da 6 a 25 nei regolamenti delle diverse nazioni, influisce pochissimo sui risultati pratici del calcolo ed appare quindi del tutto inutile (per contro si può dire che per gli stessi motivi non sarebbe però dannoso);

c) i metodi « $n$ » conducono a momenti resistenti di rottura  $M_r$  diversi facendo  $\sigma_c = \text{cost}$  ovvero  $\sigma_f = \text{cost}$ ; fatti i calcoli si deve quindi assumere il minore dei due. Questo divide il campo in due parti secondo l'influenza maggiore del ferro ( $\gamma$  debole) e del conglomerato ( $\gamma$  forte) sulla rottura;

d) il metodo regolamentare ha portato spesso i calcolatori ad armare la zona compressa, in contrasto con i risultati dell'esperienza, essendo ormai noto che è assai più efficace un aumento dell'armatura di trazione;

e) l'adattamento di metodi « $n$ » corretti (Emperger, Paris ecc.) in base ai risultati sperimentali può dare talvolta buoni risultati, ma non generali (questa osservazione può essere fatta però anche per i nuovi metodi);



f) il metodo regolamentare può dare una idea del tutto errata del modo di resistere delle strutture miste e dovrebbe, secondo i suoi oppositori, essere abbandonato nonostante i grandi servizi resi in passato alla tecnica del cemento armato.

Per contro i sostenitori del metodo regolamentare sono tuttora molti ed autorevoli ed esso non è ancora stato abbandonato.

Al Congresso di Berlino del 1936 dell'Ass. Int. di Ponti e Costruzioni, il Gehler, nel suo rapporto generale sui metodi di calcolo, concludeva: nel primo campo, *caso generale* ( $\gamma$  debole), non vi è motivo di abbandonare il metodo regolamentare; nel secondo ( $\gamma$  forte, caso eccezionale), in cui la resistenza del conglomerato è decisiva per la rottura, si può adottare un nuovo metodo basato sulla utilizzazione più spinta dei materiali, che permette di eliminare il ferro in compressione e le mensole. Un certo numero di scienziati sono tuttavia del tutto contrari all'abbandono del metodo  $n$ . Il metodo Saliger va bene per  $\gamma$  debole (quando  $\sigma_c$  raggiunge lo snervamento), ma nel secondo campo ( $\gamma$  forte) il  $\sigma_c$  è ancora lontano dallo snervamento quando il conglomerato si rompe.

Il Prof. Rös (1), nel suo rapporto sui principi di calcolo del cemento armato allo stesso Congresso è infatti ancora più deciso. « A proposito della questione «  $n$  » spesso falsamente discussa, noi dobbiamo fare espressa-

mente osservare che tale discussione è vana in una certa misura quando le tensioni ammissibili sono basate sui valori scelti di  $n$  (10, 15, 20). *L'abbandono totale del numero «  $n$  » può essere considerato come un errore*, capace di portare più complicazioni che semplificazioni. Il rapporto  $n$  rappresenta una base soddisfacente per il calcolo ».

Il Cräemer nel suo *Sguardo generale sulla teoria della plasticità in Zement*, 1941 rileva le difficoltà che nascono per conoscere con la necessaria precisione la deformazione e la tensione di rottura del conglomerato e consiglia molta cautela nell'accogliere i risultati di tali misurazioni; ritiene tuttavia che le equazioni della teoria della plasticità per il calcolo di rottura possano tranquillamente applicarsi essendo in generale approssimate per difetto, analogamente a quelle dei metodi Bittner, Saliger, Steuermann. Rimangono però ancora da studiare molti problemi, specie in relazione alle azioni dinamiche ed ai carichi ripetuti.

*Concludendo* dall'esame dei metodi proposti in questi ultimi dieci anni, vagliate le osservazioni degli scienziati e dei tecnici, io credo si possa oggi esprimere con piena convinzione ancora il parere che il metodo regolamentare non debba essere interamente abbandonato, ma sia necessario prendere in più attento esame i metodi nuovi, cercando di completarne ed estenderne la conferma sperimentale, con lo scopo di eliminare dai calcoli ogni variabile inutile e determinare con la più perfetta aderenza ai fenomeni reali, il grado di sicurezza delle strutture.

(1) M. Rös, *Les principes des calculs du béton armé* (Il congresso Berlino 1936 Ass. Intern. Ponti e Costruzioni, pag. 242).