



## MATEMATICA PER IL MACHINE LEARNING

A.A. 2022/23

**Docente (1° Parte / 6 cfu): Prof. Massimiliano Frezza**

**Docente (2° Parte / 3 cfu): Prof. Domenico Vitulano**

### PROGRAMMA

- 1) ALGEBRA LINEARE (richiami): spazi vettoriali. Rappresentazione geometrica dei vettori e delle operazioni con vettori. Insiemi di vettori linearmente dipendenti e indipendenti. Rango di un insieme di vettori. Dimensione e base di uno spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali. Determinante di una matrice quadrata. Caratteristica o rango di una matrice, Teorema di Rouché-Capelli e teorema di Cramer. Sistemi numerici e parametrici. Sistemi lineari omogenei. Cambiamento di base in uno spazio vettoriale e sue conseguenze sulle componenti di un vettore.
- 2) PROPRIETA' METRICHE DI UNO SPAZIO VETTORIALE: prodotto scalare di due vettori e norma di un vettore. Basi ortonormali e complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale. Prodotto interno di due funzioni, proiezioni ortogonali.
- 3) APPLICAZIONI LINEARI TRA DUE SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA: concetti generali: nucleo e immagine. Teorema sulla dimensione del nucleo e dell'immagine. Associazione di una matrice ad un'applicazione lineare. Effetto dei cambiamenti di base sulla matrice che rappresenta un'applicazione lineare. Autovalori e autovettori. Teorema sul legame tra autovalori e (in) dipendenza degli autovettori associati. Diagonalizzazione di un'applicazione lineare.
- 4) FORME QUADRATICHE: Caratterizzazione di una forma quadratica. Metodo dei minori. Metodo degli autovalori. Teorema condizione necessaria e sufficiente sul segno di una forma quadratica. Forma canonica di una forma quadratica. Forma quadratica vincolata.
- 5) CALCOLO VETTORIALE: Funzioni di più variabili. Insieme di definizione. Derivate direzionali. Derivate parziali. Derivate parziali di ordine successive al primo.

Teorema di Schwarz. Differenziabilità. Gradiente e differenziale totale. Formula del gradiente. Iperpiano tangente. Matrice Hessiana. Matrice Jacobiana. Funzioni omogenee. Teorema di Eulero. Formula di Taylor per funzioni di più variabili.

6) OTTIMIZZAZIONE STATICA: estremanti, estremi locali. Punti stazionari. Punti di sella. Ottimizzazione libera. Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine (metodo dei minori, degli autovalori e del polinomio caratteristico). Funzioni convesse. Ottimizzazione vincolata. Metodo di esplicitazione. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Matrice Hessiana orlata. Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine. Caso generale:  $n$  funzioni e  $p$  vincoli.

7) INTRODUZIONE AL MACHINE LEARNING: Dati, Modelli e Apprendimento. Minimizzazione del rischio. Stima dei parametri e inferenza. Applicazione dei concetti di machine learning alla regressione lineare. Stima dei parametri. Overfitting e possibili soluzioni. Esempi in Matlab

8) RIDUZIONE DELLA DIMENSIONALITÀ CON LA PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS: Problema generale. Criterio della massima varianza. Interpretazione geometrica: Proiezione delle features. Passi base della PCA in pratica. Esempi in Matlab

9) CLASSIFICAZIONE CON SUPPORT VECTOR MACHINES: Iperpiani di separazione. Concetto di Margine. Kernels. Soluzione Numerica. Esempi in Matlab

## **Testi**

- Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheng Soon Ong, “Mathematics for Machine Learning”, Cambridge University Press, 2020

- R. K. Sundaram, “A First Course in Optimization Theory”, Cambridge University Press, 1996

- Appunti del docente

## **Bibliografia di riferimento**

- Serge Lang, “Introduction to Linear Algebra”, Springer, 2nd Ed., 1985

- Sergio Bianchi, “Appunti di Algebra lineare”. Dispense distribuite gratuitamente.