



MATEMATICA PER IL MACHINE LEARNING

A.A. 2023/24

Docente (1° Parte / 3 cfu): Prof. Massimiliano Frezza

Docente (2° Parte / 6 cfu): Prof. Domenico Vitulano

PROGRAMMA

1° Parte (Prof. Frezza)

1) ALGEBRA LINEARE (richiami): spazi vettoriali. Rappresentazione geometrica dei vettori e delle operazioni con vettori. Insiemi di vettori linearmente dipendenti e indipendenti. Rango di un insieme di vettori. Dimensione e base di uno spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali. Determinante di una matrice quadrata. Caratteristica o rango di una matrice, Teorema di Rouché-Capelli e teorema di Cramer. Sistemi numerici e parametrici. Sistemi lineari omogenei. Cambiamento di base in uno spazio vettoriale e sue conseguenze sulle componenti di un vettore..

2) APPLICAZIONI LINEARI TRA DUE SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA: concetti generali: nucleo e immagine. Associazione di una matrice ad un'applicazione lineare. Cambiamenti di base: cenni. Autovalori e autovettori. Teorema sul legame tra autovalori e (in)dipendenza degli autovettori associati. Diagonalizzazione di un'applicazione lineare.

3) FORME QUADRATICHE: Caratterizzazione di una forma quadratica. Metodo dei minori. Metodo degli autovalori. Teorema condizione necessaria e sufficiente sul segno di una forma quadratica. Forma canonica di una forma quadratica. Forma quadratica vincolata.

4) CALCOLO VETTORIALE: Funzioni di più variabili. Insieme di definizione. Derivate direzionali. Derivate parziali. Derivate parziali di ordine successive al primo. Teorema di Schwarz. Differenziabilità. Gradiente e differenziale totale. Formula del gradiente. Iperpiano tangente. Matrice Hessiana. Matrice Jacobiana. Funzioni omogenee. Teorema di Eulero. Formula di Taylor per funzioni di più variabili.

5) OTTIMIZZAZIONE STATICA: estremanti, estremi locali. Punti stazionari. Punti di sella. Ottimizzazione libera. Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine (metodo dei minori, degli autovalori e del polinomio caratteristico). Funzioni convesse. Ottimizzazione vincolata. Metodo di esplicitazione. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Matrice Hessiana orlata. Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine. Caso generale: n funzioni e p vincoli.

2° Parte (Prof. Vitulano)

- 1) INTRODUZIONE a Matlab con le sue principali funzioni.
- 2) FONDAMENTI SUL MACHINE LEARNING
Cenni storici. I pilastri del machine learning: dati, modelli, learning. Dati come vettori. Modelli come funzioni. Tre fasi principali: Predizione (o inferenza). Training (o stima dei parametri). Selezione del modello (o tuning di iperparametri). Minimi quadrati da un punto di vista numerico e dal punto di vista del machine learning. Training, Validation e testing. Esempi pratici in economia e esercizi in Matlab
- 3) RIDUZIONE DELLA DIMENSIONALITÀ. Storia e Principal Component Analysis. Massima varianza. Covarianza, autovalori e autovettori. MNIST dataset. Esempi in Matlab.
- 4) CLASSIFICAZIONE: Unsupervised learning, Supervised learning, Reinforcement learning. Support Vector Machine. Iperpiani. Derivazione tradizionale di margin, soft margin, Dual Support Vector Machine. Simulazioni in Matlab
- 5) RETI NEURALI. Cenni su convoluzione tra vettori (1-D), matrici (2-D) e in dimensioni superiori. Esempi ed esercizi. Sottocampionamento in 1-D e d-D. Cenni su semplici reti neurali e su reti neurali profonde (Convolutional Neural Networks: CNNs). Esempi di classificazione di dati e in ambito finanziario con programmazione Matlab

Testi

- Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheng Soon Ong, "Mathematics for Machine Learning", Cambridge University Press, 2020

- R. K. Sundaram, "A First Course in Optimization Theory", Cambridge University Press, 1996

- Appunti dei docenti

Bibliografia di riferimento

- Sergio Bianchi, "Appunti di Algebra lineare". Dispense distribuite gratuitamente.