Analisi Vettoriale

CdS	**Fisica**
CFU	9
Ore	84
Semestre	I
Anno	II
Numero medio di studenti	100/canale
Canalizzazione	3 canali
Referente del Gruppo di Lavoro	Francesca De Marchis, Flavia Lanzara, Andrea Terracina

1. RESOCONTO

Calendario degli incontri
26/11/2021 – Assemblea CAD con discussione plenaria 03/12/2021 – Riunione tra Presidente CAD e docenti di Analisi Vettoriale 06/12/2021 – Riunione tra Presidente CAD e docenti di Analisi e Analisi Vettoriale 17/12/2021 – Discussione al Consiglio CAD 22/12/2021 – Riunione tra Presidente CAD e docenti di Analisi Vettoriale e Modelli e Metodi Matematici della Fisica

Criticità emerse

Osservazioni dei docenti di Analisi Vettoriale.

- Dall'analisi degli OPIS e dai colloqui con gli studenti emerge che il corso è gradito ma ha un programma molto ampio rispetto ai 9 CFU assegnati. Per tale ragione si ritiene necessario che parte del programma sia trasferito al corso di Analisi.
- Includere nel programma del corso di Geometria (1 anno) i seguenti argomenti: studio del segno delle forme quadratiche, teorema di Sylvester e test degli autovalori (argomento presente nel programma ma non sempre trattato da tutti i canali); curve in forma parametrica, ascissa curvilinea, lunghezza di una curva; elementi di geometria elementare del piano e dello spazio (studio delle coniche e delle quadriche).
- Includere nel programma di Analisi (1 anno) i seguenti argomenti: elementi di topologia in R^n. Funzioni di più variabili. Continuità e derivabilità (argomento presente nel programma ma non sempre trattato da tutti i canali); integrali impropri in R (argomento non sempre trattato da tutti i canali, l'argomento non è presente nel programma).

Azioni correttive proposte

Si propone di assegnare dei tutori ai corsi di Analisi Vettoriale che svolgano gli esercizi assegnati settimanalmente agli studenti.
Nell'AA 22/23 è stato attribuita una posizione di tutor magistrale per il corso di Analisi Vettoriale.
Sarebbe utile fissare anticipatamente in accordo con gli altri docenti dei corsi del secondo anno le date degli esoneri.

Buone pratiche

Si suggerisce che i docenti di tutti i 4 canali del corso di Analisi, svolgano il programma da loro indicato nella scheda corrispondente fino al punto 8 incluso, almeno nelle sue linee generali.
Si suggerisce anche che i docenti di tutti i 4 canali del corso di Geometria svolgano il programma da loro indicato nella scheda corrispondente.

Note e commenti

Programma concordato

Elementi di topologia in R^N. Funzioni di più variabili. Funzioni continue, derivate direzionali, differenziabilità e formula di derivazione delle funzioni composte.

Teorema del differenziale totale, derivate seconde e teorema di Schwarz. Formula di Taylor in più variabili. Massimi e minimi liberi per funzioni di più variabili.

Teorema di Dini o teorema delle funzioni implicite, estremi vincolati: teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Curve, parametrizzazioni e sostegno di una curva. Integrali curvilinei di una funzione scalare.

Lavoro di un campo vettoriale. Rotore di un campo vettoriale, campi vettoriali irrotazionali. Campi vettoriali conservativi. Forme differenziali lineari chiuse ed esatte. Insiemi semplicemente connessi. Relazione tra campi conservativi e irrotazionali. Campi conservativi in domini con lacune.

Successioni uniformemente convergenti e continuità della funzione limite. Convergenza di serie di funzioni: puntuale, uniforme, assoluta, totale. Serie di potenze.

Misura di Lebesgue e integrale di Lebesgue in più variabili. Funzioni integrabili in senso improprio secondo Riemann e funzioni sommabili secondo Lebesgue. Integrali doppi e tripli e formule di riduzione. Cambiamento di variabili negli integrali doppi e tripli. Teorema di Guldino per il volume di solidi di rotazione.

Superfici regolari. Piano tangente, versore normale e superfici orientabili. Area di superfici. Teorema di Guldino per l'area di superfici di rotazione. Integrali di superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

Formule di Gauss-Green. Divergenza di un campo vettoriale. Teoremi della divergenza e del rotore (o di Stokes) nel piano e nello spazio.

Richiami su equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Equazioni a variabili separabili, equazioni di Bernoulli, equazioni di Eulero, equazioni autonome. Problema di Cauchy: esistenza e unicità in piccolo, soluzione massimale, studio qualitativo di equazioni differenziali.

2. TABELLA SYLLABUS

3. Esempi di esercizi d'esame/fogli di esercizi

Scritto di Analisi Vettoriale 24/01/2022
proff. F. De Marchis, F. Lanzara, A. Terracina

COGNOME, NOME e MATRICOLA:

DOCENTE: ⊗ De Marchis ⊗ Lanzara ⊗ Terracina

Istruzioni: il testo d'esame deve essere riconsegnato insieme all'elaborato, tutti i ragionamenti devono essere adeguatamente motivati!

Esercizio 1. Dimostrare che esistono due punti nella forma $(0, y_0)$ e $(0, y_1)$ intorno ai quali l'equazione

$$y^3 \sin(x) + y^2 - 2ye^x - 3 - x = 0$$

definisce implicitamente due funzioni $g_0(x)$ e $g_1(x)$ tali che $g_0(0) = y_0$ e $g_1(0) = y_1$.
Studiare il comportamento di $g_0(x)$ e $g_1(x)$ in un intorno di $x = 0$ (crescenza, decrescenza e natura degli eventuali punti critici).

Soluzione. Posto

$$f(x, y) = y^3 \sin(x) + y^2 - 2ye^x - 3 - x$$

i punti y_0 e y_1 sono soluzione dell'equazione

$$f(0, y) = y^2 - 2y - 3 = 0$$

da cui si trova $y_0 = -1$ e $y_1 = 3$. Essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \subset C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$f_y(x, y) = 3y^2 \sin(x) - 2e^x + 2y, \qquad f_y(0, y) = 2y - 2, \qquad f_y(0, -1) = -4 \neq 0, \qquad f_y(0, 3) = 4 \neq 0$$

sono verificate le ipotesi del teorema delle funzioni implicite:
– esiste un'unica funzione $g_0(x)$ definita in un intorno I_0 di $x_0 = 0$ a valori in un intorno di $y_0 = -1$ tale che $g_0(0) = -1$ e definita implicitamente da $f(x, g_0(x)) = 0$; inoltre $g_0 \in C^\infty(I_0)$;
– esiste un'unica funzione $g_1(x)$ definita in un intorno I_1 di $x_1 = 0$ a valori in un intorno di $y_1 = 3$ tale che $g(0) = -3$ e definita implicitamente da $f(x, g_1(x)) = 0$; inoltre $g_1 \in C^\infty(I_1)$.
Si ha

$$f_x(x, y) = y^3 \cos(x) - 2e^x y - 1, \qquad f_x(0, y) = -1 - 2y + y^3, \qquad f_x(0, -1) = 0, \qquad f_x(0, 3) = 20.$$

e quindi

$$g_0'(0) = -\frac{f_x(0, -1)}{f_y(0, -1)} = 0, \qquad g_1'(0) = -\frac{f_x(0, 3)}{f_y(0, 3)} = -20/4 = -5 < 0.$$

In conclusione si ha che $x = 0$ e\` un punto critico per $g_0$; la funzione $g_1$ e\` decrescente in $x = 0$. Per studiare la natura del punto critico calcoliamo

$$f_{xx}(x, y) = y^3(-\sin(x)) - 2e^x y, \qquad f_{xx}(0, -1) = 2$$

e, dalla formula

$$g_0''(0) = -\frac{f_{xx}(0, -1)}{f_y(0, -1)} = -2/(-4) = 1/2 > 0,$$

si trova che $x = 0$ e\` un punto di minimo relativo per g_0.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + 2^{-n} + \frac{x^2}{n^2}}$$

i. studiare la convergenza puntuale per $x \in$;
ii. dire se la convergenza e` uniforme in ;
iii. calcolare, giustificando i passaggi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx.$$

Soluzione. i. Fissato $x \in$, poiche´ $1 + 2^{-n} + \frac{x^2}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$, $f_n(x) \to x$.
Dunque $f_n(x) \to x =: f(x)$, per $n \to +\infty$, per ogni $x \in$.
ii. Essendo

$$\sup_{x\in} |f_n(x) - x| = \sup_{x\in} |x| \left(\frac{2^{-n} + \frac{x^2}{n^2}}{1 + 2^{-n} + \frac{x^2}{n^2}} \right) \underset{x=n}{\geq} n \left(\frac{2^{-n} + 1}{1 + 2^{-n} + 1} \right) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty,$$

la convergenza non e` uniforme in .
iii. Nell'intervallo $[1, 2]$ le f_n convergono puntuamente a f, inoltre $|f_n(x)| \leq 2 =: h(x)$ per ogni $x \in [1, 2]$, con h sommabile in $[1, 2]$ quindi possiamo applicare il Teorema di Lebesgue e ottenere

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^2 x\, dx = \frac{3}{2}.$$

Alternativamente possiamo verificare che le f_n convergono uniformemente a f in $[1, 2]$, infatti:

$$\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - x| = \sup_{x\in[1,2]} |x| \left(\frac{2^{-n} + \frac{x^2}{n^2}}{1 + 2^{-n} + \frac{x^2}{n^2}} \right) \overset{(*)}{\leq} 2\left(2^{-n} + \frac{4}{n^2}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0,$$

dove in $(*)$ abbiamo usato che in $[1, 2]$: $|x| \leq 2$ e $1 + 2^{-n} + \frac{x^2}{n^2} \geq 1$.
Perciò, essendo le f_n continue e uniformemente convergenti a f in $[1, 2]$ per il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^2 x\, dx = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 3. Sia

$$T = \{(x, y, z) : \quad x^2 + y^2 \le z \le 3 + 2y\}.$$

i. Calcolare il volume di T.
ii. Posto $\mathbf{F} = (xy - 3x + e^z,\ (x^2 + 2y + \cos(x),\ 2\cos(x) + 4y))$, calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da T.
iii. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso le due superfici regolari che compongono la frontiera di T, orientando il versore normale uscente da T.

Soluzione. i. T è un dominio xy-normale. Per parametrizzarlo dobbiamo riuscire a descrivere l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 3 + 2y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \le 4\},$$

si tratta dunque di una palla di raggio 2 centrata in $(0, 1)$.
Perciò

$$\begin{aligned}
Vol(T) &= \iiint_T 1\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{3+2y} 1\, dz \right) dx\, dy \\
&= \iint_D (3 + 2y - x^2 - y^2)\, dx\, dy \\
&\underset{\substack{\text{coord. polari} \\ \text{centrate in } (0,1)}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta = 8\pi.
\end{aligned}$$

ii. Per calcolare il flusso uscente da T, essendo $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, possiamo applicare il Teorema della divergenza. In questo caso

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = y - 1,$$

quindi

$$\begin{aligned}
\Phi_T = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_T y - 1\, dx\, dy\, dz = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{3+2y} (y - 1)\, dz\, dx\, dy \\
&= \iint_D (3 + 2y - x^2 - y^2)(y - 1)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta = 0.
\end{aligned}$$

iii. Le due superfici cartesiane che compongono la frontiera di T sono:

$$\Sigma_1 \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 3 + 2y =: f(x, y) \end{cases} (x, y) \in D, \qquad \Sigma_2 \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 =: g(x, y) \end{cases} (x, y) \in D,$$

entrambe risultano naturali essendo $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
Per calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso le due superfici calcoliamo il flusso attraverso Σ_1 e otteniamo il flusso attraverso Σ_2 per differenza con il flusso totale uscente calcolato al punto precedente.
Essendo $\mathbf{r_x} \wedge \mathbf{r_y} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, -2, 1)$ orientato verso l'esterno di T

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dx\, dy = \iint_D \mathbf{F} \cdot (0 - 2, 1)\, dx\, dy = -\iint_D 2x^2\, dx\, dy = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \cos^2\theta\, d\theta\, d\rho = -8\pi.$$

In conclusione, poiché Σ_2 è orientata con il versore normale uscente da T,

$$\Phi_2 = \Phi_T - \Phi_1 = 8\pi.$$

Esercizio 4. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2+4} + x^2 - z^2,\ \frac{y}{x^2+y^2+z^2+4} + y^2 + z,\ \frac{z}{x^2+y^2+z^2+4} - x^2 + z^2\right)$$

e la curva

$$\gamma : z = x + 3y + 4, \quad x^2 + y^2 = 4$$

i. dire se la curva γ e` regolare determinando un'opportuna rappresentazione parametrica;
ii. dire se il campo **F** e` conservativo nel suo insieme di definizione;
iii. Calcolare l'area della superficie $z = x + 3y + 4, \quad x^2 + y^2 \le 4$;
iv. calcolare la circuitazione del campo **F** lungo la curva γ, percorsa in verso antiorario se vista dall'alto.

Soluzione. i) La curva ammette rappresentazione parametrica

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\sin t, \quad z(t) = 2\cos t + 6\sin t + 4, \quad t \in [0, 2\pi]$$

che risulta regolare avendo tutte le componenti di classe C^1 e essendo

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \ge \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 2 > 0 \qquad \text{per ogni } t \in (0, 2\pi).$$

ii) $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, quindi condizione necessaria affinche´ sia conservativo e` che sia irrotazionale, ma

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = -1 \ne 0,$$

percio` possiamo concludere che il campo **F** non e` conservativo.
iii) Possiamo parametrizzare Σ come

$$\Sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + 3y + 4 =: f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Osserviamo che risulta regolare essendo una superficie cartesiana con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Essendo $\mathbf{r_x} \wedge \mathbf{r_y} = (-f_x, -f_y, 1) = (-1, -3, 1)$ e dunque $|\mathbf{r_x} \wedge \mathbf{r_y}| = \sqrt{11}$:

$$Area(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, d\sigma = \iint_D \sqrt{11}\, dx\, dy = \sqrt{11}\, 4\pi.$$

iv) Essendo $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ possiamo applicare il teorema di Stokes. Inoltre essendo il versore normale $\mathbf{r_x} \wedge \mathbf{r_y}$ orientato in modo compatibile secondo Stokes al verso di percorrenza prescritto della curva γ ed essendo

$$\text{rot}\, \mathbf{F} = (-1, 2(x - z), 0)$$

abbiamo

$$\int_\gamma (\mathbf{F}, \mathbf{T})\, ds = \int_\Sigma (\text{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{N})\, d\sigma = \int_D \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r_x} \wedge \mathbf{r_y})\, dxdy = \int_D (1 - 6(-3y - 4))\, dxdy = \int_D (25 + 18y)\, dxdy = 100\pi.$$

Esercizio 5.
Dato il problema di Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y' = 4t^3(1 - e^y) \\ y(0) = \log 2 \end{cases}$$

i. dire perché il problema (1) ammette un'unica soluzione locale.
Senza determinare esplicitamente la soluzione $y(t)$ si provi che:
ii. il punto $t = 0$ è un punto di max locale per la soluzione y;
iii. la soluzione esiste in tutto $\mathbb{R}$;
iv. esistono $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)$ e calcolarli.
iv. Si determini esplicitamente la soluzione

Soluzione. i. Dato che $f(t, u) = 4t^3(1 - e^u) \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \subset C^1(\mathbb{R}^2)$ si può applicare il teorema di Cauchy che assicura l'esistenza e l'unicità locale della soluzione del problema.
ii. L'equazione differenziale ammette come soluzione costante $y_0(t) = 0$. Dato che due soluzioni distinte non possono intersecarsi, e il nostro dato iniziale $y(0) = \log 2 > 0$, la soluzione del problema di Cauchy rimarrà sempre positiva, da cui $(1-e^{y(t)}) < 0$ per ogni t che si trova sull'insieme di definizione massimale (a, b) della soluzione. Usando questa informazione otteniamo che $y'(t) < 0$ per ogni $t \in (0, b)$ e $y'(t) > 0$ per ogni $t \in (a, 0)$. Da questo deduciamo che 0 è un punto di massimo relativo per la soluzione.
iii. Dallo studio fatto nel punto ii. deduciamo anche che $y(0) = \log(2)$ è anche massimo assoluto per la soluzione nel suo insieme di definizione. Per cui la soluzione $y(t)$ assume valori nell'intervallo $(0, \log(2)]$ $\forall t \in (a, b)$. Quindi per il teorema di esistenza globale (in ipotesi di limitatezza a priori) l'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$.
iv. Usando i punti precedenti (la monotonia, la limitatezza della soluzione e l'esistenza globale) deduciamo che esistono i limiti a $\pm\infty$ e vale

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell_+ \in [0, \log(2)), \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = \ell_- \in [0, \log(2)).$$

Se fosse $\ell^\pm \neq 0$ avremmo

$$\lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = \lim_{t\to\pm\infty} 4t^3(1 - e^{y(t)}) = \mp\infty,$$

ma questo sarebbe assurdo contro il Teorema dell'asintoto, quindi

$$\ell^\pm = 0.$$

E' una equazione differenziale a variabili separabili:

$$\int \frac{dy}{1 - e^y}dy = \int 4t^3 dt,$$

da cui essendo

$$\int \frac{dy}{1 - e^y}dy = \int -\frac{-e^{-y}}{e^{-y} - 1}dy = -\log|e^{-y} - 1| \overset{\text{per } y>0}{=} -\log(1 - e^{-y})$$

otteniamo, grazie alla positività di $y(t)$ sopra discussa, che

$$-\log(1 - e^{-y(t)}) = t^4 + c \quad\Rightarrow\quad 1 - e^{-y(t)} = e^{-t^4-c} \quad\Rightarrow\quad e^{-y(t)} = 1 - e^{-t^4-c}.$$

Imponendo la condizione iniziale abbiamo $e^{-y(t)} = 1 - \frac{1}{2}e^{-t^4}$, perciò

$$y(t) = -\log(1 - \tfrac{1}{2}e^{-t^4}).$$