

# L-30 Fisica

- **Analisi**
- **Analisi vettoriale**
- **Geometria**
- **Chimica**

<b>Analisi</b>	
<b>CdS</b>	<b>Fisica</b>
CFU	9
Ore	90
Semestre	I
Anno	I
Numero medio di studenti	~100/canale
Canalizzazione	4 canali
Referente del Gruppo di Lavoro	Nadia Ansini

## 1. RESOCONTO

### Calendario degli incontri

26/11/2021 – Assemblea CAD con discussione plenaria

06/12/2021 – Riunione tra Presidente CAD e i docenti di Analisi e Analisi Vettoriale

17/12/2021 – Discussione al Consiglio CAD

### Criticità emerse

Osservazioni dei docenti di Analisi.

- Ci sono studenti in difficoltà, alcuni di loro attribuiscono le loro carenze alla scuola superiore di provenienza (liceo artistico, liceo musicale)
- Gli studenti non usufruiscono abbastanza della disponibilità del docente a fare ricevimento individuale o in piccoli gruppi sia durante lo svolgimento del corso che in preparazione degli appelli d'esame in tutto l'anno accademico. Tale atteggiamento non aiuta il docente a capire l'effettivo grado di apprendimento degli studenti durante il corso, lasciando al docente come unica opportunità di verifica l'esame finale.
- L'emergenza pandemica non ha consentito di svolgere le usuali prove in itinere, ci auguriamo che con il ritorno alla normalità si possano recuperare anche questi come strumenti di "comunicazione" tra docente e studenti.
- Fondamentale la presenza dei tutors che ci auguriamo possano essere selezionati in tempo per collaborare con docenti e studenti contestualmente all'inizio del corso. I tutors, in quanto studenti esperti, possono ricoprire il ruolo strategico di ponte tra studenti e docente soprattutto nei casi di gravi carenze. Lo studente inesperto del primo anno potrebbe sentirsi più a suo agio ad avere un primo confronto con uno studente senior. Certamente il tutor non può e non deve sostituire il docente nel suo ruolo di insegnante/educatore alla disciplina della matematica.

Osservazioni dei docenti di fisica e degli studenti.

- Calcolo differenziale e integrale per funzioni di più variabili. Già nei corsi del II semestre I anno e I semestre II anno, prima dunque di Analisi Vettoriale, i docenti di fisica utilizzano questo formalismo. Non sempre questi argomenti sono trattati nel corso di Analisi e questo può generare problemi.

### Azioni correttive proposte

Per ovviare al problema delle carenze in matematica di base sono state prese in considerazione due opzioni:

- Introdurre 3 CFU di tipo AAF su Matematica di base in alternativa a quella sulle Abilità Informatiche, secondo quanto fatto in alcuni corsi di laurea di area ingegneristica da svolgere in parallelo ad Analisi;
- Proporre a tutte le matricole i pre-corsi di matematica di base offerti dalla Facoltà prima dell'inizio delle lezioni del I semestre.

Per l'AA 22/23 la seconda opzione è già stata messa in atto. La prima opzione richiede invece una discussione più approfondita in Facoltà, si tratta di capire come conciliare questo nuovo AAF con l'attuale AAF in Abilità informatica. Potrà essere presa in considerazione nei prossimi anni accademici.

Per ovviare al problema del completo svolgimento del programma che è considerato a rischio dato il monte ore disponibile, non sono state trovate soluzioni facilmente realizzabili. Un beneficio dovrebbe derivare comunque dai pre-corsi di matematica di base, la cui frequenza da parte degli studenti permetterebbe ai docenti di analisi di ridurre il numero di lezioni introduttive dedicate a richiami di argomenti di matematica delle scuole superiori.

### Buone pratiche

*Suggerimenti presenti sulle schede iniziali e/o discusse con i CdS*

### Note e commenti

### Programma concordato

#### 1. Fondamenti

Cenni di insiemistica e di logica. Gli insiemi numerici e le loro proprietà. Il principio di induzione. Insiemi limitati, estremo inferiore e superiore.

#### 2. Funzioni reali di variabile reale.

Dominio e codominio, iniettività e suriettività, composizione ed inversione, restrizioni ed estensioni. Funzioni reali di variabile reale. Grafici di funzione e operazioni elementari su grafici. Richiami sulle funzioni elementari: i polinomi, le funzioni razionali, il modulo, le funzioni trigonometriche, l'esponenziale. Composizione e inversione di funzioni. Funzioni invertibili e funzioni monotone.

Inverse di potenze, funzioni trigonometriche ed esponenziali.

#### 3. Successioni e serie.

Successioni di numeri reali. Definizione di limite. Proprietà delle successioni convergenti: combinazioni lineari, prodotti, operazioni razionali. Successioni divergenti ed oscillanti. Monotonia del limite. Forme indeterminate.

Confronto di infiniti. Successioni monotone: caratterizzazione del limite in termini di estremo superiore/inferiore.

Definizione del numero di Nepero. Criterio del rapporto e gerarchia degli infiniti. Il teorema di Bolzano-Weierstrass per successioni limitate. Successioni convergenti ed insiemi chiusi. Successioni di Cauchy, criterio di Cauchy.

Serie numeriche: definizione e convergenza. Linearità. Condizione necessaria.

Serie a termini positivi. La serie geometrica, la serie armonica generalizzata. Criterio di confronto e del confronto asintotico. Criterio della radice e radice asintotico, rapporto e rapporto asintotico. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz. Serie a segno qualsiasi. Convergenza semplice e assoluta. La serie esponenziale.

#### *4. Limiti e continuità.*

Limiti di funzioni: definizione, esempi e controesempi. Operazioni con i limiti. Monotonia del limite. Teorema del confronto per i limiti di funzioni. Teorema ponte e criterio di non esistenza. Limiti infiniti e limiti all'infinito.

Limite destro e sinistro. Confronto di infiniti e di infinitesimi. Limiti notevoli. Funzioni continue. Classi di funzioni continue ed esempi di funzioni discontinue. Teorema dei valori intermedi e teorema di esistenza degli zeri.

Problemi di massimo e minimo su intervalli chiusi e limitati. Teorema di Weierstrass. Teoremi sulla continuità ed invertibilità delle funzioni (senza dim.)

#### *5. Calcolo differenziale in una variabile.*

Definizione di derivata. Generazione di funzioni derivabili: combinazioni lineari, prodotti, rapporti, composizione e inversione. Teorema di Rolle, teorema di Lagrange e teorema di Cauchy (senza dim.). Funzioni a derivata positiva, negativa, nulla. Punti stazionari, Teorema di Fermat, punti di massimo e minimo locale e globale. Criteri di convessità per funzioni derivabili una volta e per funzioni derivabili due volte. Problemi di massimo e minimo su intervalli illimitati. Ordine di infinito e ordine di infinitesimo. Teorema di de L'Hôpital. Funzioni convesse: definizione, interpretazione geometrica, esempi. Continuità nei punti interni e monotonia del rapporto incrementale. Caratterizzazione delle funzioni convesse derivabili. Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Studio qualitativo del grafico di funzione.

Polinomio di Taylor: definizione, proprietà, resto. Espressione del resto in forma di Lagrange.

#### *6. Integrale di Riemann e Integrale Improprio.*

Problema del calcolo delle aree. Integrale definito. Proprietà dell'integrale: linearità, additività e monotonia. Teorema della media integrale. Integrabilità delle funzioni monotone. Uniforme continuità, teorema di Heine Cantor e integrabilità delle funzioni continue. Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann: la funzione di Dirichlet.

Funzioni integrali: definizione e lipschitzianità. Le primitive. Teorema fondamentale del calcolo integrale e calcolo degli integrali indefiniti. Integrali elementari. Integrazione per sostituzione e per parti. Integrazione di funzioni razionali. Integrali impropri: integrazione di funzioni non limitate su domini limitati. Integrazione di funzioni su domini illimitati. Criteri di convergenza del confronto e del confronto asintotico, al finito e all'infinito. Integrabilità assoluta. L'integrabilità assoluta implica l'integrabilità. Criterio integrale per le serie e Convergenza della serie armonica generalizzata.

#### *7. Equazioni differenziali lineari.*

Equazioni lineari del primo ordine con coefficiente costante. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Caso omogeneo: struttura dell'insieme delle soluzioni, determinazione di due soluzioni linearmente indipendenti. Caso non omogeneo: struttura

dell'insieme delle soluzioni, determinazione di una soluzione particolare attraverso il metodo di analogia. Caso di forzanti polinomiali, esponenziali, trigonometriche. Risonanza.

### 8. Funzioni di più variabili.

Struttura vettoriale di  $\mathbb{R}^d$ , norma e sua proprietà e distanza euclidea. Cenni di topologia in  $\mathbb{R}^d$ . Successioni di punti e nozione di convergenza. Legame tra la convergenza in  $\mathbb{R}^d$  e la convergenza in  $\mathbb{R}$ . Curve in  $\mathbb{R}^d$ . Continuità e derivabilità. Vettore velocità. Grafico di una funzione di più variabili. Insiemi di livello. Continuità di funzioni di più variabili. Calcolo differenziale: derivate parziali, derivate direzionali.

Punti stazionari e condizione necessaria per punti di massimo e minimo relativo. Eventuali cenni su derivate successive e matrice Hessiana.

## 2. TABELLA SYLLABUS

NB: tutti gli argomenti selezionati come prerequisito o come richiesto, risultano indispensabili per tutti gli insegnamenti del CdS in Fisica.

### 1. Matematica di base

	Prerequisito	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Aritmetica	x			
Proporzioni e percentuali	x			
Equazioni di 1 e 2 grado	x			
Insiemi numerici	x			
Retta reale e piano cartesiano	x			
Geometria analitica nel piano e nello spazio	x			
Numeri complessi	trattato nel corso parallelo di Geometria			
Insiemistica e logica		x		
Dimostrazioni dirette, per assurdo e per induzione		x		

Combinatoria		x		
--------------	--	---	--	--

## 2. Algebra lineare

	Prerequisito	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Vettori del piano e dello spazio	Argomenti trattati nel corso parallelo di Geometria			
Teoria degli spazi vettoriali				
Calcolo con matrici				
Determinante e rango				
Sistemi lineari				
Forme quadratiche				

## 3. Funzioni

	Prerequisito	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Iniettività, suriettività, invertibilità		x		
Operazioni elementari sui grafici		x		
Simmetrie, periodicità		x		
Monotonia		x		
Funzioni affini, equazioni e disequazioni	x			
Funzione valore assoluto		x		
Polinomi di secondo grado	x			
Potenze e radici ennesime	x			
Potenze con esponente reale		x		

Esponenziali	x			
Logaritmi	x			
Funzioni trigonometriche	x			
Formule trigonometriche	x			

#### 4. Limiti

	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Concetto di limite	x		
Limiti notevoli	x		
Comportamento asintotico	x		
Successioni numeriche	x		
Serie numeriche	x		
Asintoti	x		
Continuità	x		
Classificazione delle discontinuità	x		
Teoremi sulle funzioni continue (zeri, Weierstrass)	x		
Uniforme continuità	x		
Infiniti, infinitesimi, confronto	x		

#### 5. Derivate

	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Concetto di derivata	x		
Calcolo delle derivate	x		

Teoremi di base del Calcolo Differenziale (Fermat, Rolle, Lagrange)	x		
Convessità e concavità	x		
Studio di funzione	x		
Teoremi avanzati del Calcolo Differenziale (Hopital, Taylor)	x		

## 6. Integrali

	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Integrali definiti	x		
Funzioni integrabili	x		
Primitive	x		
Teorema fondamentale del calcolo integrale	x		
Integrazione per parti	x		
Integrazione per sostituzione	x		
Integrazione delle funzioni razionali	x		
Ulteriori metodi di integrazione			x
Volume di solidi di rotazione			x
Area di superfici di rotazione			x
Lunghezza di un grafico			x

## 7. Equazioni differenziali

	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario

Teorema di esistenza e unicità generale	x		
Lineari del primo ordine	x		
Lineari del secondo ordine omogenee	x		
Lineari del secondo ordine non omogenee	x		
Variabili separabili	x		
Solo qualche esempio applicativo	x		

### 8. Biostatistica

	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Eventi casuali e probabilità		Argomenti di grande interesse per il CDS in Fisica, sono trattati nei corsi di Laboratorio, in particolare Laboratorio di Meccanica del I anno II semestre. E' necessario che il corso di Analisi fornisca le basi per la trattazione di questi argomenti.	
Probabilità condizionata e formula di Bayes			
Distribuzioni discrete			
Distribuzioni continue			
Legge dei grandi numeri			
Teorema del limite centrale			
Statistica descrittiva			
Test statistici			
Uso di R		Questi, e altri sistemi di calcolo, sono trattati nei corsi di Laboratorio. Non è necessaria un'introduzione nel corso di Analisi.	
Uso di Excel			

### 9. Altro argomento da segnalare

	Richiesto	Argomenti correlati nel CdS	Non necessario
Cenni su funzioni vettoriali e di più variabili			



Curve parametriche	cenni		
Limiti e continuità in più variabili	cenni		
Gradiente	x		
Differenziabilità	x		

### 3. Esempi di esercizi d'esame/fogli di esercizi

#### PROVA SCRITTA DI ANALISI (CANALE A-DEL) – 27 GENNAIO 2022

COGNOME: \_\_\_\_\_ NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

**Esercizio 1** (4 punti). Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2) - \sin x^2}{x^4}.$$

**Esercizio 2** (4 punti). Determinare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^{47} \sin(e^{-k})$$

**Esercizio 3** (3 punti). Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(1 + e^{3x})}{x^2 + 1}$$

**Esercizio 4** (8 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x}$$

determinandone il dominio, l'insieme di positività e gli zeri, i limiti negli estremi del dominio ed eventuali asintoti, il dominio della derivata e gli intervalli di crescita e decrescenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo, il dominio della derivata seconda e gli intervalli di concavità e convessità, disegnandone qualitativamente il grafico.

**Esercizio 5** (5 punti). Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\sin(4 \log x)}{x} - \frac{x^2}{1 + 4x^2}$$

**Esercizio 6** (5 punti). Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{JJ} + 2y^J - 3y = 3e^{-x}$$

e verificare se l'equazione differenziale ammette soluzioni che soddisfano la proprietà

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

**Esercizio 7** (4 punti). Dimostrare il seguente enunciato: se  $f$  è una funzione continua in  $\mathbb{R}$  tale che  $f(0) > 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

allora  $f$  ammette un punto di massimo assoluto  $x_0$  e  $f(x_0) > 0$ .