Lezione 2

“La cassetta degli arnesi”

La funzione

Funzione

- Per funzione si intende una legge che associa ad ogni valore assunto da una variabile (x) un solo valore della variabile (y).
- La variabile x è detta variabile indipendente
- La variabile y è detta variabile dipendente
- Esempi: $y = x + 3$; $y = x^2$
- In generale si scrive
  - $y = f(x)$

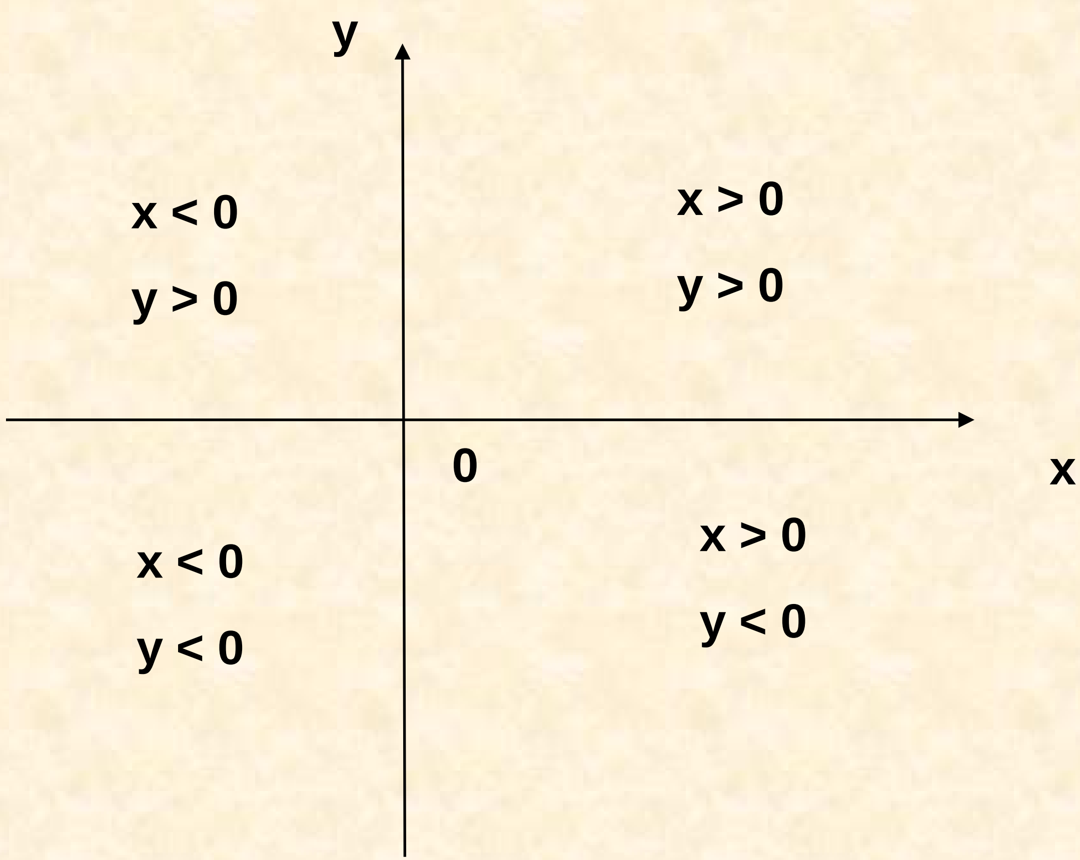
Il grafico di una funzione

Sistema di assi cartesiani

•Tale sistema è costituito da due rette, una orizzontale ed una verticale che si intersecano in modo da formare un angolo di 90 gradi.

•Il punto di intersezione tra le due rette viene detto origine degli assi. Ad esso è assegnato, per convenienza, il valore zero.

Il grafico di una funzione



La funzione lineare

$$y = a + bx$$

a e b = parametri

a = intercetta verticale

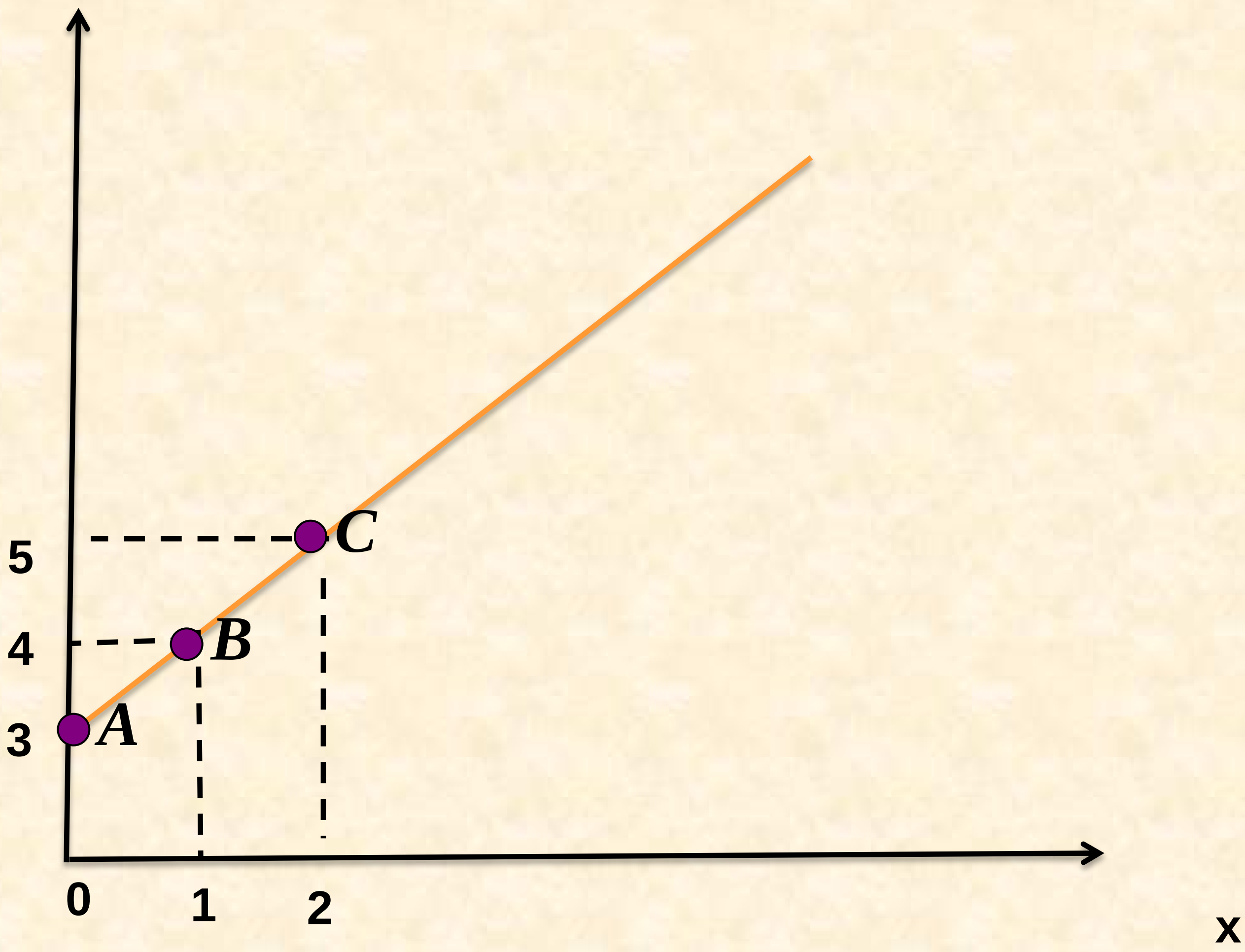
b = coefficiente angolare della retta

La funzione lineare

- Si consideri ad esempio la funzione
  - y = 3 + x dove a = 3 e b = 1
- Consideriamo i seguenti valori:

Valori della variabile x	Valori della variabile y
0	3
1	4
2	5
3	6
…..	…..
10	13
20	23

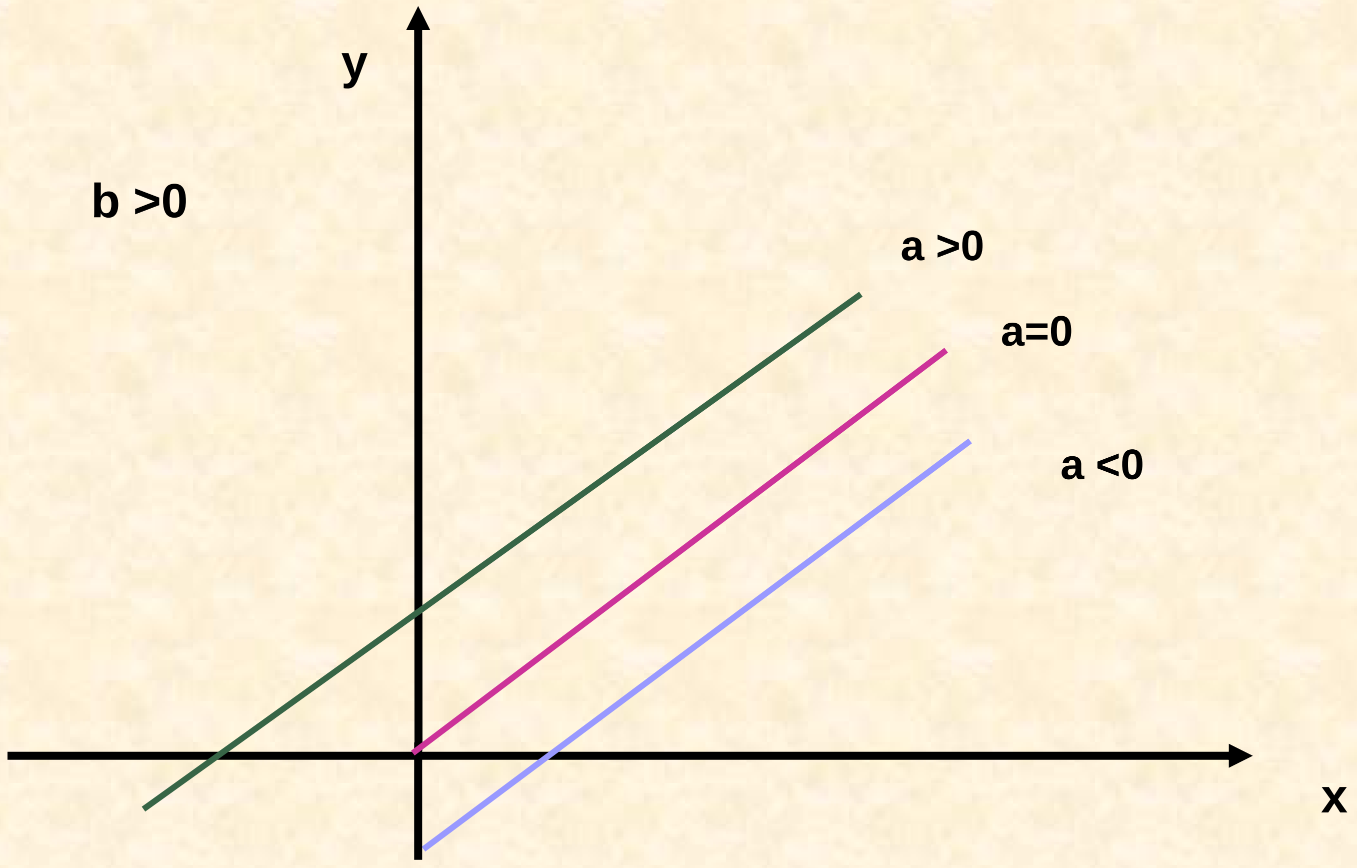
La funzione lineare



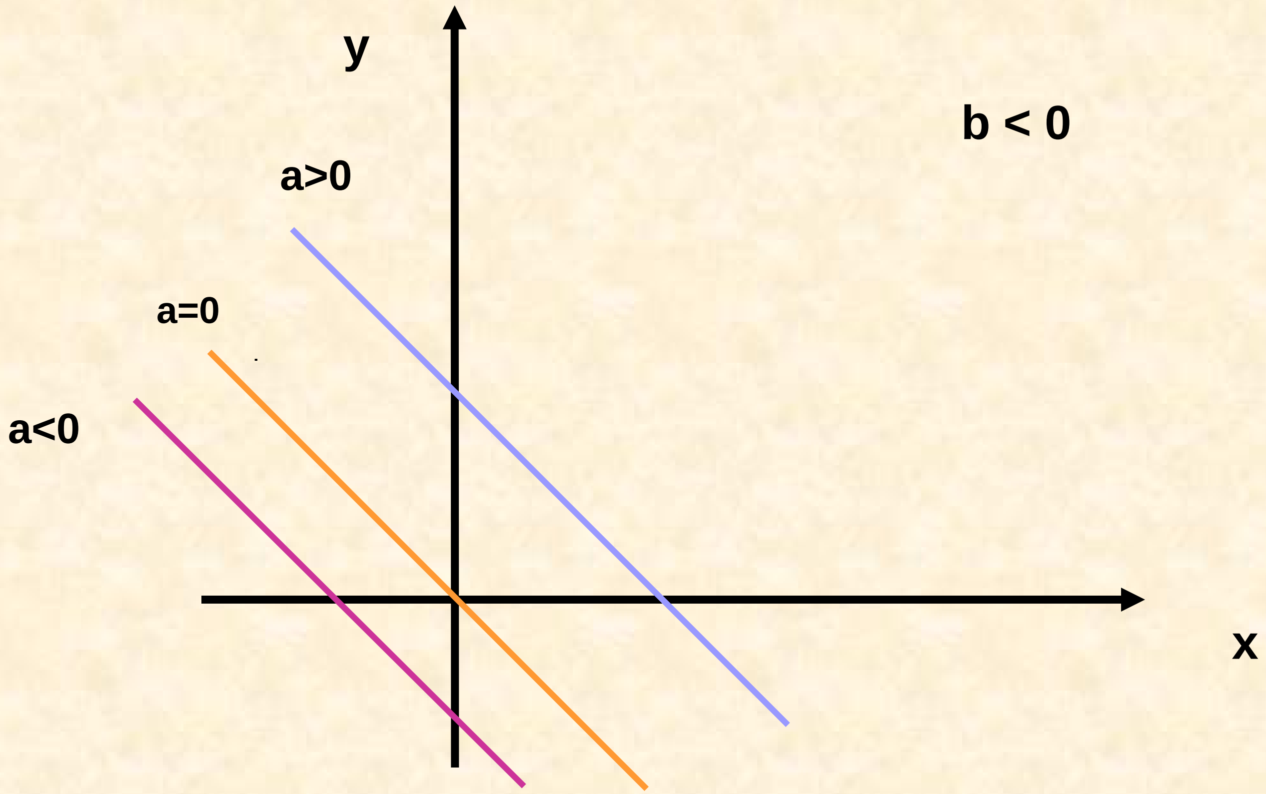
Direzione della retta

- Si definisce direzione di una retta rispetto ad una coppia di assi cartesiani, l'angolo α che la retta forma con la direzione positiva dell'asse 0x.
- Se α è un angolo acuto (< 90°), la retta cresce da sinistra verso destra; se α è un angolo ottuso (> 90°), la retta decresce da sinistra verso destra.

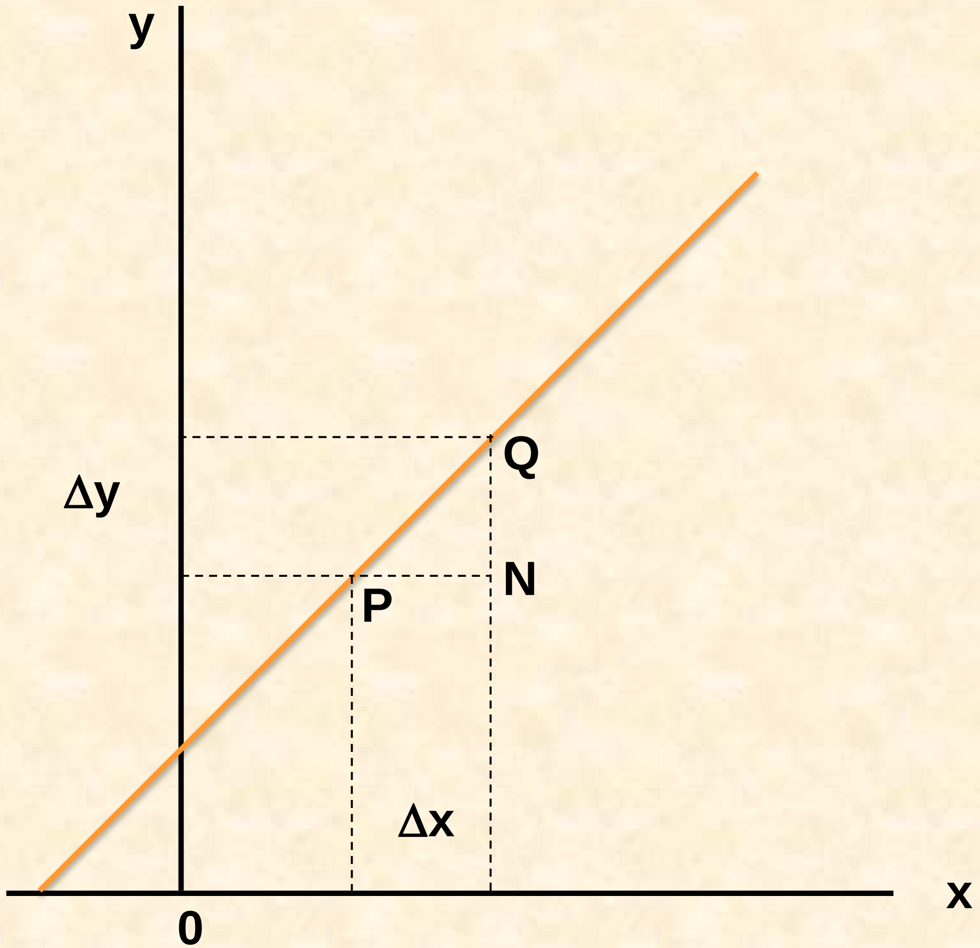
Direzione della retta



Direzione della retta



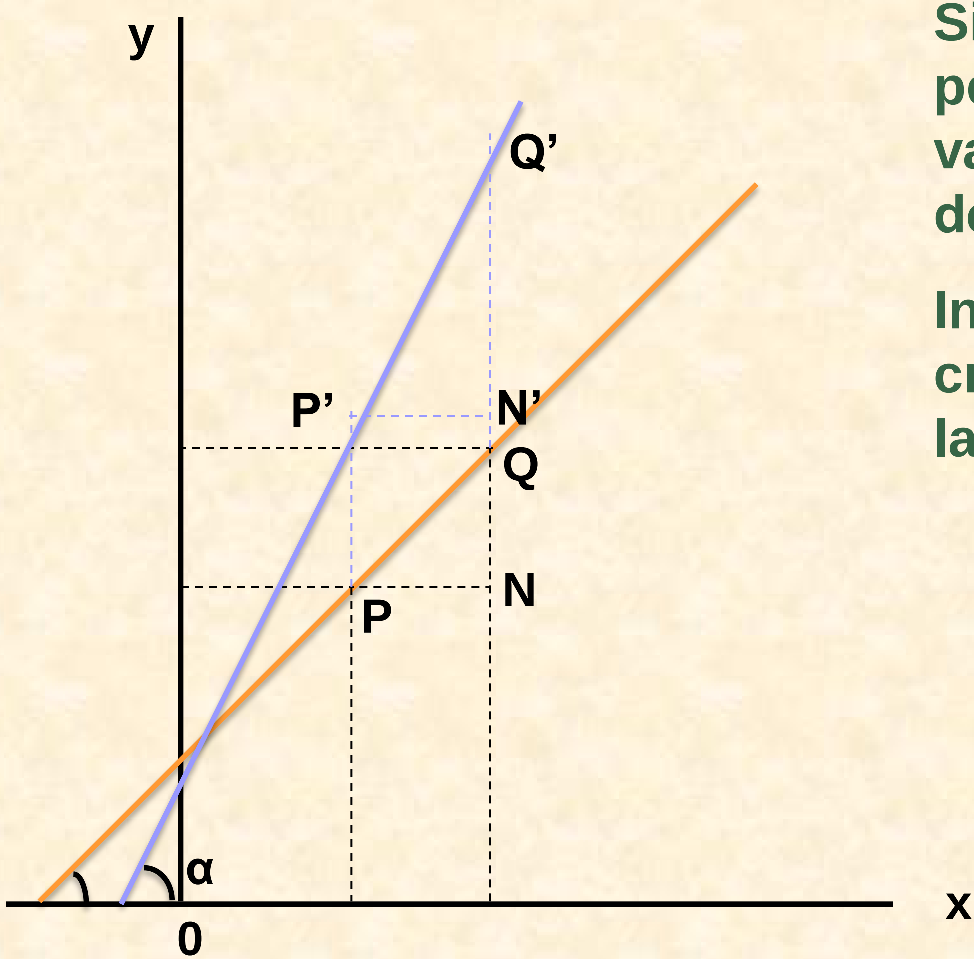
Pendenza di una retta



Si definisce **pendenza** (inclinazione) di una retta riferita all'asse 0x, il rapporto NQ/PN

Si noti come la pendenza di una retta sia costante e coincida con il coefficiente angolare (b)

Pendenza di una retta

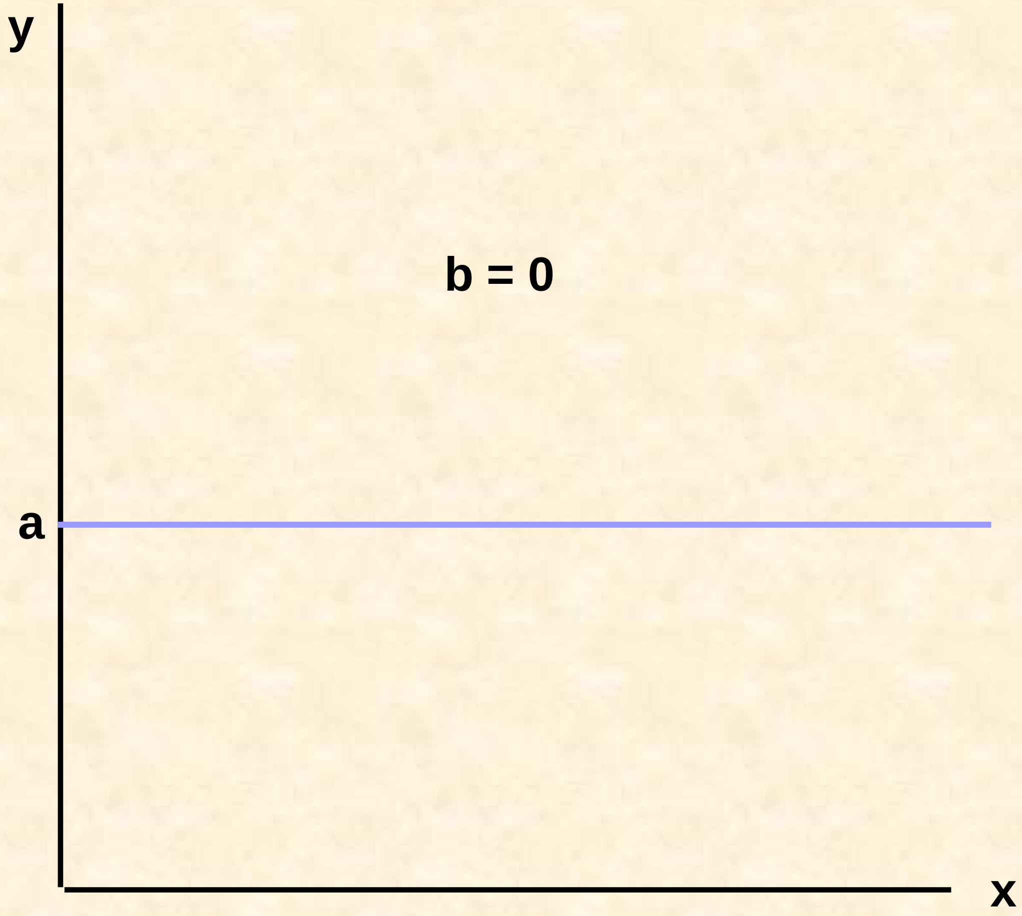


Si può notare come la pendenza della retta varia al variare dell’angolo α.

In particolare, al crescere dell’angolo α, la pendenza aumenta.

- N’Q’/P’N’> NQ/PN
- Angolo α della retta blu > dell’angolo α della retta rossa

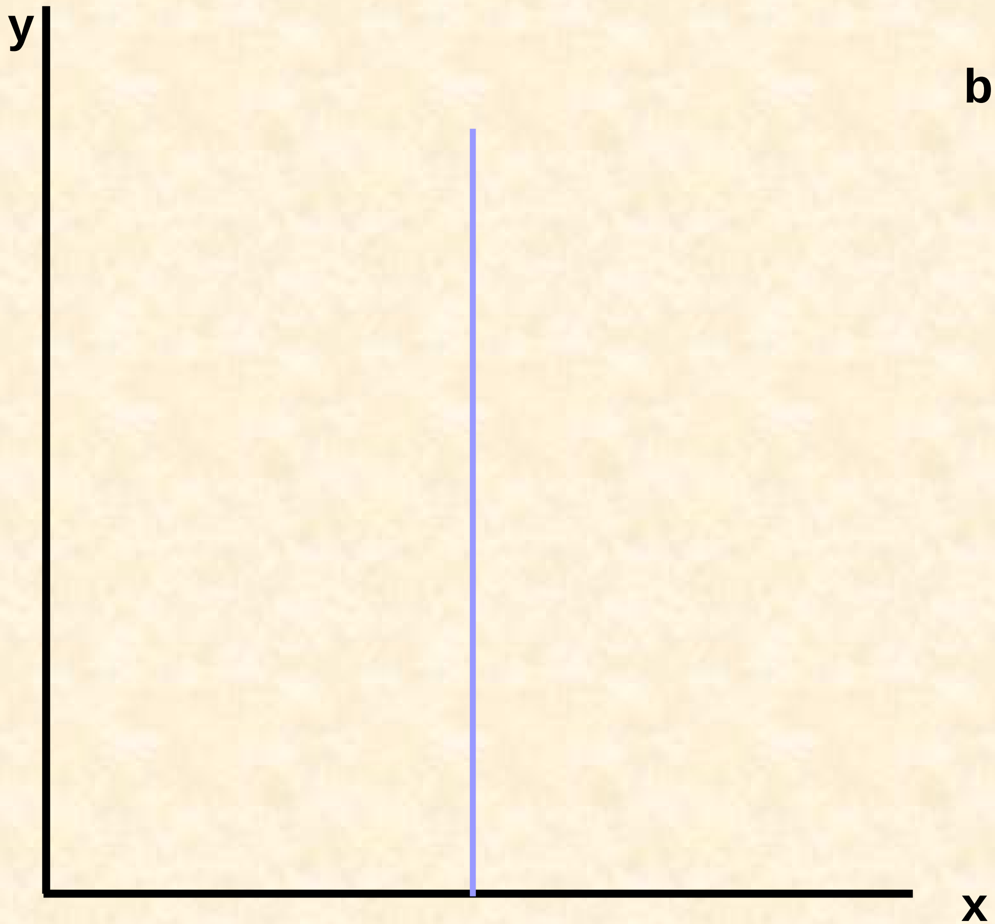
Pendenza di una retta - casi limite



Pendenza di una retta - casi limite

$b \longrightarrow \infty$

Quanto più rapidamente la retta cresce e tende a diventare parallela all’asse 0y, tanto più l’inclinazione aumenta e tende a valori inifinitamente elevati



Variazioni assolute delle variabili

- Si definisce variazione assoluta di x (Δx) la differenza tra il valore finale e quello iniziale di *x*.
  - Se *x* passa da 0 a 1 Δx = 1; se *x* passa da 2 a 1 Δx = -1; se *x* passa da 2 a 10 Δx = 8.
- Si definisce variazione assoluta di *y* (Δy): la differenza tra il valore finale e quello iniziale di *y* in corrispondenza di ogni data variazione di *x*.
  - Nei tre casi precedenti: quando $\Delta x = 1 \rightarrow \Delta y = 3$; quando $\Delta x = -1 \rightarrow \Delta y = -1$; quando $\Delta x = 8 \rightarrow \Delta y = 8$.

Saggio medio di variazione

- Si definisce saggio medio di variazione di x rispetto ad y il rapporto tra una variazione assoluta della y ed una variazione assoluta della x

Saggio medio di variazione $= \Delta y / \Delta x$

Saggio medio di variazione

- Se per esempio
  - $y = 3 + x$ dove $a = 3$ e $b = 1$
- È facile verificare che:
- quando $\Delta x = 1$, qualunque sia il valore iniziale di x, si ha sempre $\Delta y = 1$ (che è il valore del coefficiente angolare b);
- qualunque sia il valore di Δx (e qualunque sia il valore iniziale di x), si ottiene sempre $\Delta y = \Delta x$ (ovvero $\Delta y = b\Delta x$).
- Il coefficiente angolare b è *sempre* uguale al rapporto $\Delta y / \Delta x$

Variazioni relative delle variabili

- Si definisce variazione relativa (percentuale) di una variabile la variazione assoluta divisa per il livello di partenza (di solito il risultato viene moltiplicato per 100)
- Se ad esempio il valore iniziale è $p^v = 20$ e quello finale $p^n = 22$, la variazione assoluta sarà $\Delta p = 2$.
- La variazione percentuale sarà invece

  $\Delta p / p^v = 2/20 = 0{,}1 = 10\%$.

Elasticità di una funzione

- Data una funzione y = f(x), il rapporto tra la variazione percentuale della y e la variazione percentuale della x, prende il nome di elasticità della y rispetto alla x

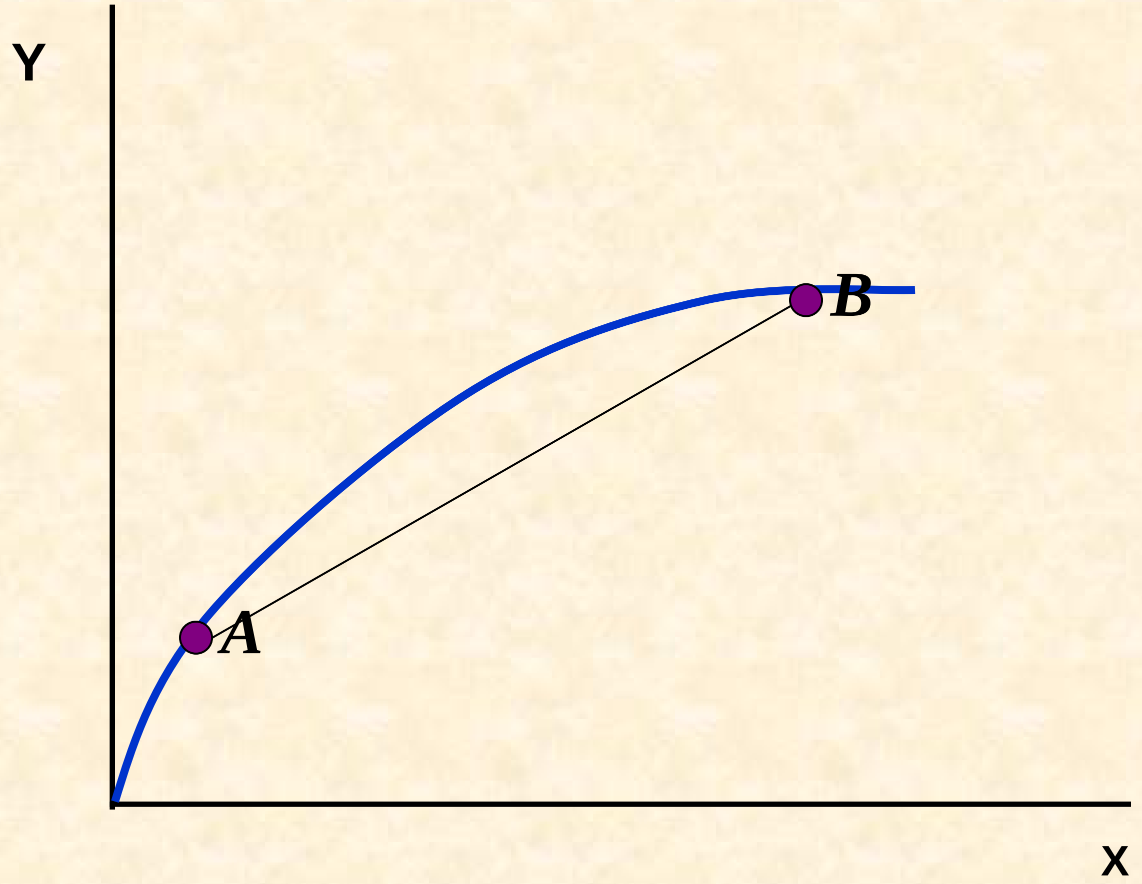
$$E = \frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}$$

Le funzioni non lineari

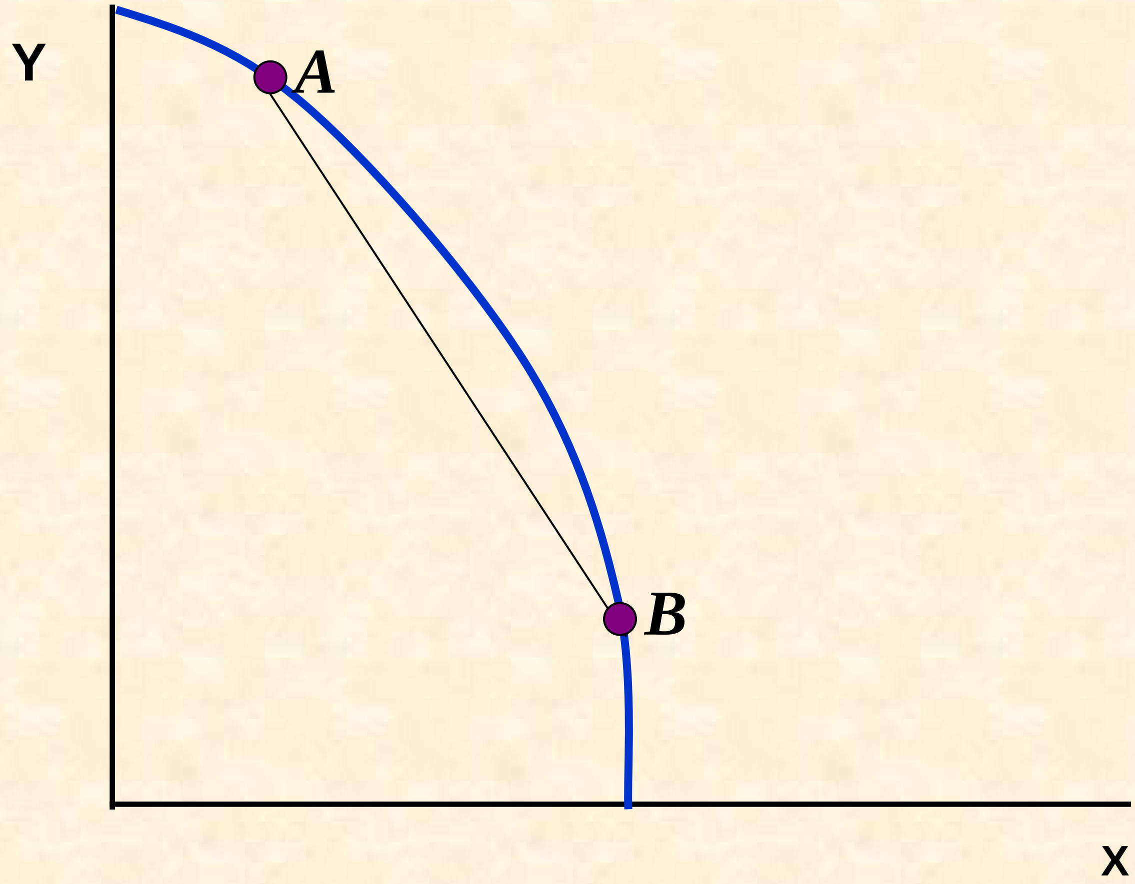
- Funzioni concave
  - In termini geometrici, la concavità implica che le curve hanno "la pancia" rivolta verso l'alto. Più rigorosamente, una funzione si definisce concava, se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico si trova al di sotto del grafico stesso

- Funzioni convesse
  - In termini geometrici, la convessità implica che le curve hanno la pancia rivolta verso l'origine degli assi. Più rigorosamente, una funzione si definisce convessa, se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico si trova al di sopra del grafico stesso

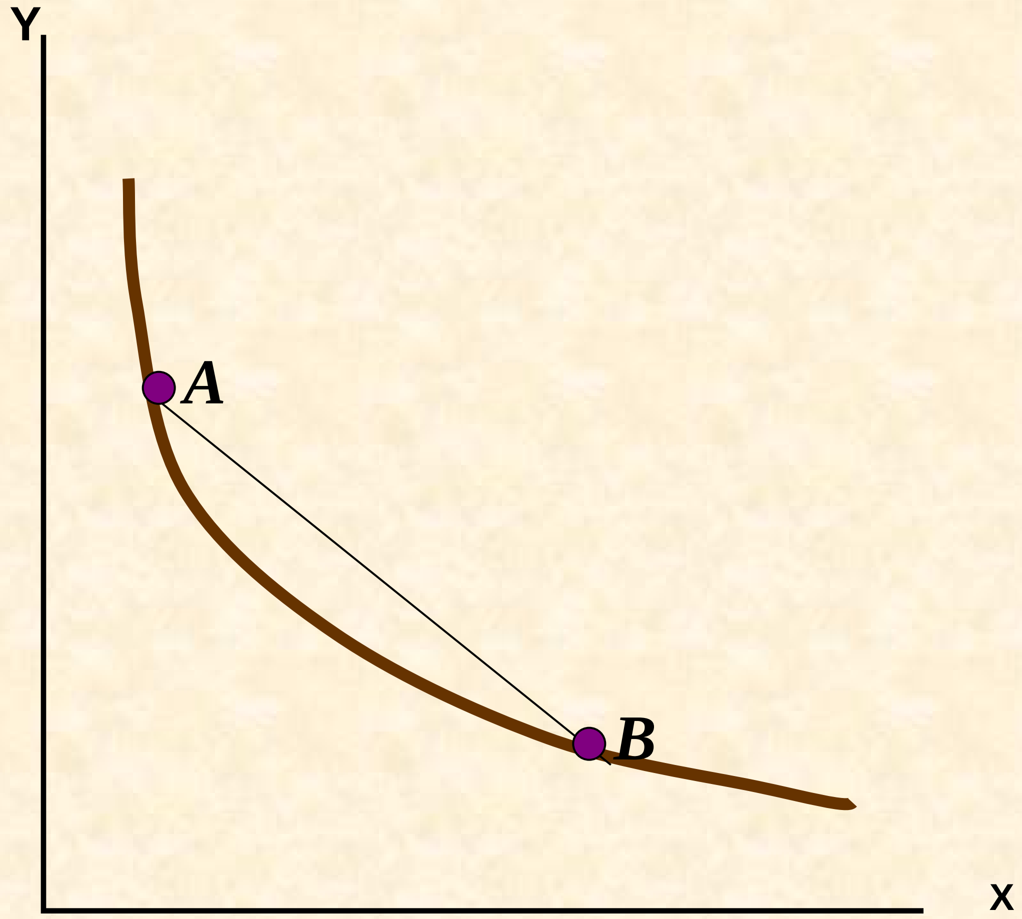
Concava e crescente



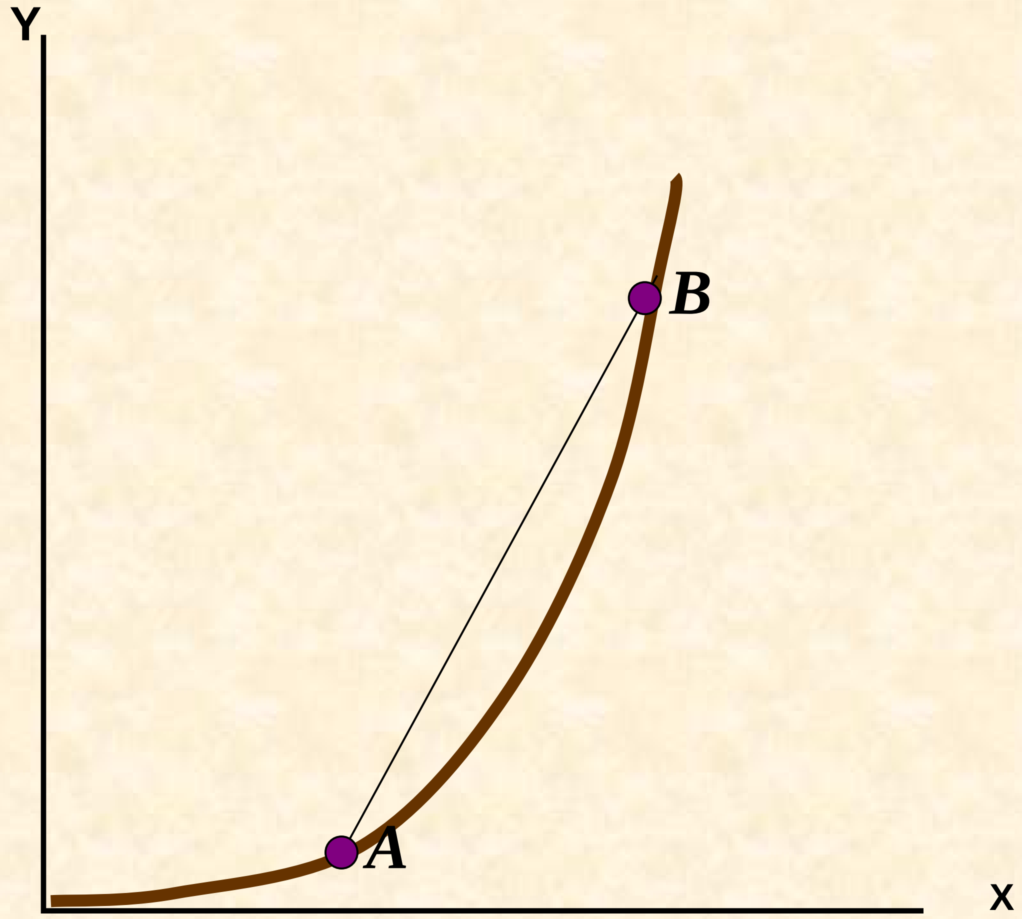
Concava e decrescente



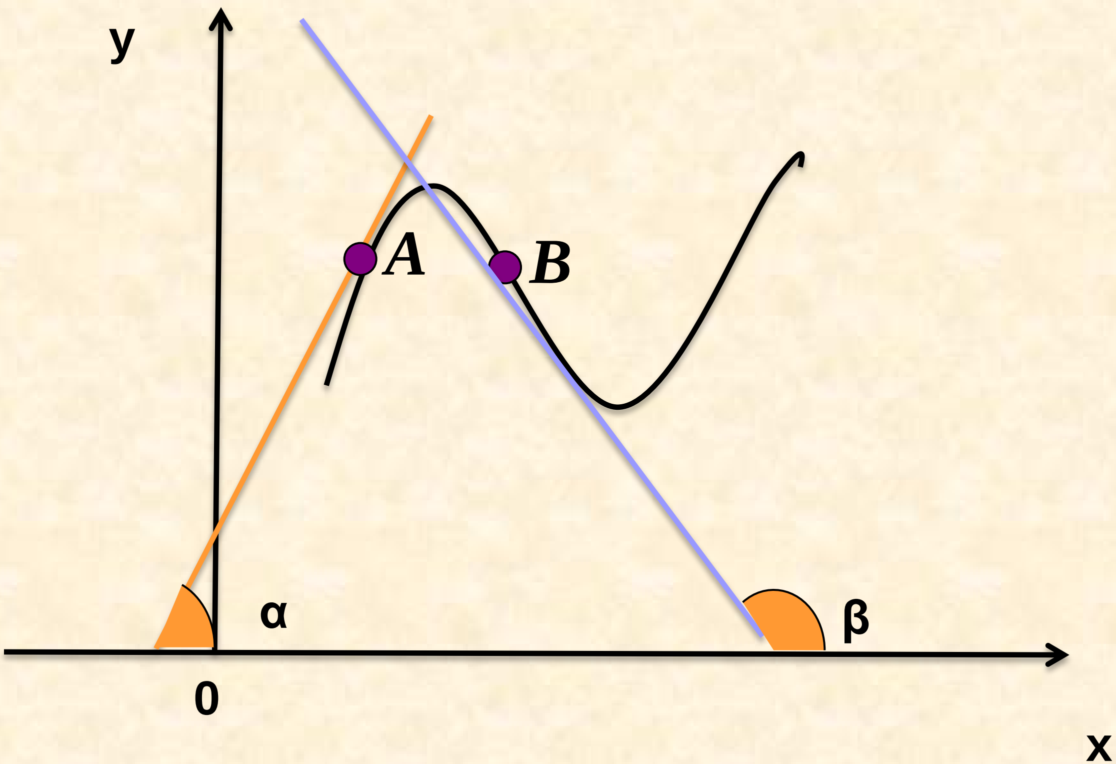
Convessa e decrescente



Convessa e crescente



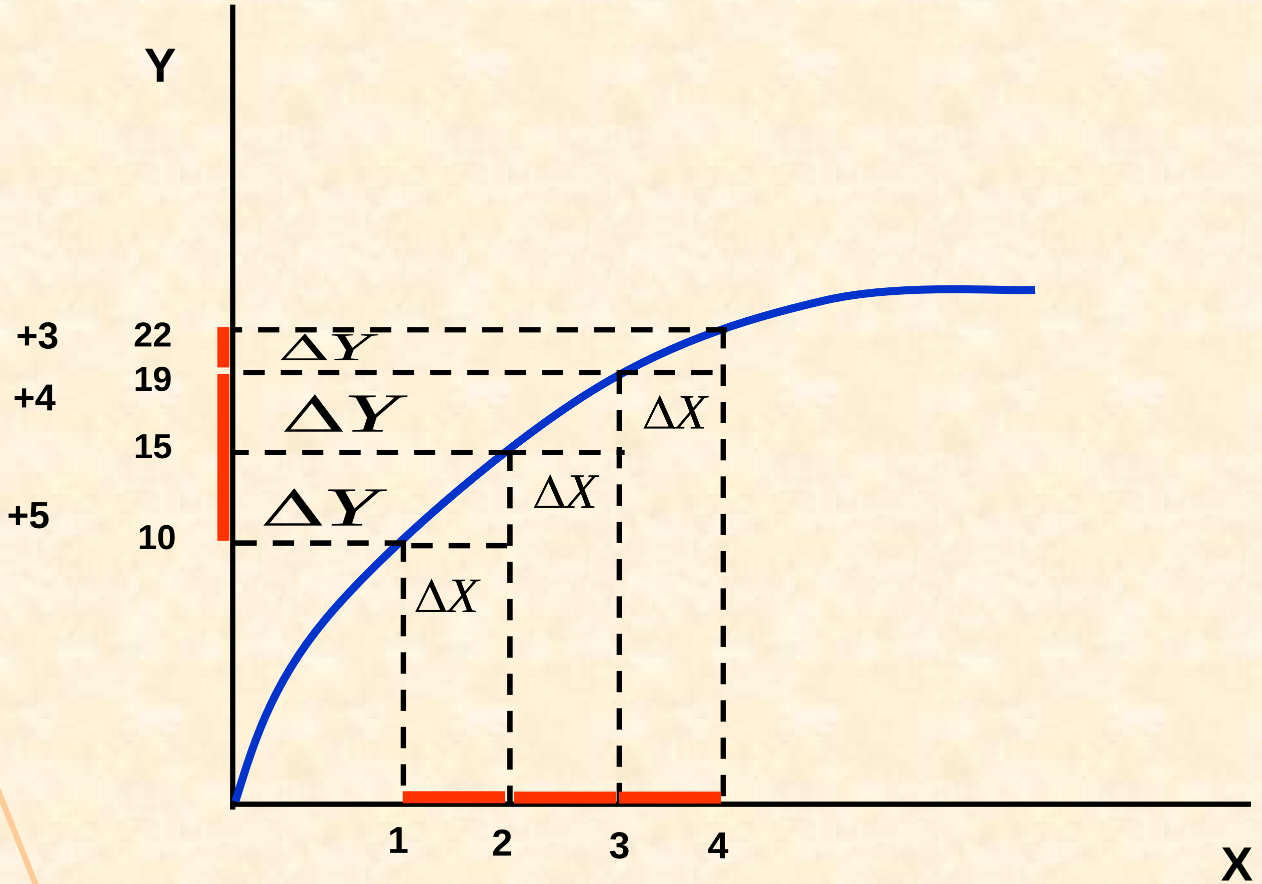
La pendenza di una funzione non lineare



La pendenza di una funzione non lineare

- Essa varia da punto a punto.
- **E' misurata dal** coefficiente angolare (pendenza) della retta tangente in ogni **punto della curva**
- Pertanto coincide con il saggio medio di variazione ($\Delta y/\Delta x$) della funzione in quel punto.

Esempio: andamento del SMV in una funzione concava e crescente



Proprietà delle funzioni non lineari

- Funzioni concave
  - Crescenti: SMV > 0; cresce a tassi decrescenti
  - Decrescenti SMV <0 decresce a tassi decrescenti
- Funzioni convesse
  - Crescenti: SMV > 0; cresce a tassi crescenti
  - Decrescenti SMV <0; decresce a tassi crescenti