A

Fondamenti di aritmetica ed algebra

1. Concetti introduttivi

Un'**espressione** consiste in un insieme di **termini** legati da **operatori matematici**. Si distinguono, in particolare, le **espressioni matematiche** dalle **espressioni algebriche**, in quanto nel primo caso i termini sono espressi unicamente in forma numerica, mentre nel secondo caso i termini possono essere espressi sia in forma numerica che letterale.

Un'**identità** è un'uguaglianza tra due espressioni verificata per qualsiasi valore attribuito ai termini espressi in forma letterale (**incognite**) che ne fanno parte. Un'**equazione** differisce da un'identità in quanto le espressioni a sinistra e a destra del segno di uguale assumono lo stesso valore soltanto per alcuni numeri assegnati alle incognite.

I due **criteri** più utilizzati **per classificare le equazioni** fanno riferimento al numero di incognite e al massimo grado di elevazione a potenza di ogni termine che compare nell'equazione. Così, ad esempio, un'**equazione di primo grado ad un'incognita** è un'equazione nella quale compare un'unica incognita ed ogni termine è elevato al massimo esponente 1. Similmente, un'**equazione di primo grado in due incognite** è un'equazione nella quale compaiono due incognite ed ogni termine è elevato al massimo ad esponente 1, mentre un'**equazione di secondo grado in un'incognita** è un'equazione nella quale compare un'incognita ed ogni termine è elevato al massimo ad esponente 2. E così via.

Risolvere un'equazione significa trovare, se esistono, uno o più insiemi di numeri che, sostituiti alle incognite, rendono le due espressioni alla sinistra e alla destra del segno di uguale di pari valore. Tali insiemi di numeri prendono il nome di **soluzioni dell'equazione** (o, per brevità, "soluzioni"). Un'**equazione** si dice **impossibile** quando non ammette soluzioni, mentre due **equazioni** si dicono **equivalenti** quando ammettono le stesse soluzioni.

In generale, un'equazione in due incognite associa ad un valore attribuito ad un'incognita uno, nessuno, o più valori attribuiti all'altra, e dunque può essere rappresentata in **un sistema di assi cartesiani $x \perp y$** mediante un insieme di punti facenti parte del piano.

Una **disequazione** (o disuguaglianza), infine, è una relazione tra due espressioni che indica come, per alcuni numeri assegnati alle incognite, tali espressioni non siano uguali. Gli stessi **criteri** utilizzati per classificare le equazioni possono essere utilizzati per classificare le disequazioni. **Risolvere una disequazione** significa trovare uno o più insiemi di numeri, se esistono, che verificano la disuguaglianza. Tali insiemi di numeri prendono il nome di **soluzioni della disequazione** (o per brevità, "soluzioni"). Una disequazione si dice **impossibile** quando non ammette soluzioni, e **sempre verificata** quando è vera per qualsiasi insieme di numeri preso come soluzione. Due **disequazioni** si dicono **equivalenti** quando ammettono le stesse soluzioni.

In generale, anche le disequazioni in due incognite possono essere rappresentate in **un sistema di assi cartesiani $x \perp y$** mediante un insieme di punti facenti parte del piano. In particolare, le soluzioni di una disequazione in due incognite sono tutte le coppie ordinate di numeri reali che verificano la disuguaglianza.

2. Risoluzione di un'equazione di primo grado in un'incognita

Per risolvere un'equazione di primo grado in un'incognita è necessario fare ricorso ai **principi di equivalenza**:

– sommando o sottraendo alle due espressioni alla sinistra ed alla destra del segno di uguale due espressioni equivalenti si ottiene un'equazione equivalente a quella iniziale;

– moltiplicando o dividendo le due espressioni alla sinistra ed alla destra del segno di uguale per due espressioni equivalenti e diverse da zero si ottiene un'equazione equivalente a quella iniziale.

Applicando tali principi, è possibile trasformare l'equazione iniziale in un'equazione equivalente mediante una o più delle seguenti **operazioni**:

– ogni termine può essere spostato da un lato all'altro del segno di uguale, a meno di un cambiamento di segno;

– due termini uguali presenti dal lato opposto del segno di uguale possono essere eliminati;

– è possibile cambiare di segno (moltiplicare per -1) le due espressioni alla sinistra ed alla destra del segno di uguale;

– è possibile trasformare un'equazione contenente uno o più termini frazionari in un'equazione contenete soltanto termini interi moltiplicando le espressioni ad entrambi i lati dell'equazione per il minimo comune multiplo di tutti i termini al denominatore.

Utilizzando le operazioni abilitate dai principi di equivalenza è sempre possibile "ridurre" l'equazione di primo grado in un'incognita alla sua **forma normale** data da

$$ax = b,$$

dove "*a*" (il "coefficiente" dell'incognita) e "*b*" (il "termine noto") sono due numeri interi qualsiasi.

Se **"*a*" è diverso da zero**, dividendo per "*a*" le espressioni alla destra ed alla sinistra del segno di uguale si ottiene la soluzione dell'equazione, data da

$$x = b/a$$

In questo caso, l'equazione si dice determinata ed ha un'unica soluzione (se "*b*" è uguale a 0, la soluzione è nulla).

Se, invece, **"*a*" è uguale a zero ma "*b*" è diverso da zero**, l'equazione si dice impossibile e non ha soluzioni.

Infine, se **sia "*a*" che "*b*" sono pari a zero**, l'equazione si dice indeterminata ed ha infinite soluzioni (ogni equazione indeterminata è di fatto un'identità).

3. Risoluzione di una disequazione di primo grado in un'incognita

Anche per risolvere una disequazione di primo grado in un'incognita è necessario fare ricorso ai principi di equivalenza, ma in questo caso il **secondo principio di equivalenza** viene ridefinito nel modo seguente: moltiplicando o dividendo le due espressioni alla sinistra ed alla destra del segno di disuguaglianza per due espressioni equivalenti e maggiori di zero si ottiene una disequazione equivalente a quella iniziale, mentre moltiplicando o dividendo le due espressioni alla sinistra ed alla destra del segno di disuguaglianza per due espressioni equivalenti e minori di zero per ottenere una disequazione equivalente a quella iniziale bisogna **cambiare il verso del segno di disuguaglianza**.

Anche in questo caso, facendo ricorso ai principi di equivalenza è possibile trasformare la disequazione iniziale in una disequazione equivalente mediante una o più **operazioni**, avendo l'accortezza di invertire il segno di disuguaglianza nel caso di moltiplicazioni o divisioni per espressioni equivalenti minori di zero. In questo modo, è sempre possibile "ridurre" la disequazione di primo grado in un'incognita in una forma del tipo

$$ax > b,$$

(opp. $<$, opp. $\geq$, opp. $\leq$), dove "*a*" (il "coefficiente" dell'incognita) e "*b*" (il "termine noto") sono due numeri interi qualsiasi.

Se **“*a*” è diverso da zero**, dividendo per “*a*” le espressioni alla destra ed alla sinistra del segno di uguale (ed eventualmente cambiando il verso della disuguaglianza) si ottiene la soluzione della disequazione, data da

$$x > b/a \qquad (\text{opp.} < \text{opp.} \geq \text{opp.} \leq)$$

In questo caso, la disequazione ammette un intervallo infinito di soluzioni (il fatto che “*b*” possa essere uguale a 0, in questo caso, è irrilevante).

Se, invece, **“*a*” è uguale a zero ma “*b*” è diverso da zero**, l’equazione può essere impossibile e non avere soluzioni (quando non può essere verificata), oppure sempre possibile ed avere come soluzioni l’intero insieme dei numeri reali).

Infine, se **sia “*a*” che “*b*” sono pari a zero**, la disequazione è impossibile, dato che entrambe le espressioni considerate assumono valore zero (si tratta in questo caso di un’identità).

4. Risoluzione di un’equazione di primo grado in due incognite

Un’equazione di primo grado in due incognite è un’equazione lineare, la cui **soluzione** è una coppia di valori che rende uguali le espressioni alla sinistra ed alla destra del segno di uguale. Utilizzando le operazioni consentite dai principi di equivalenza, ogni equazione lineare in due incognite può essere riscritta nella **forma normale** data da

$$ax + by = c$$

dove “a”, “b” (i “coefficienti” delle incognite) e “c” (il “termine noto”) sono numeri interi qualsiasi.

Nel caso in cui **“a” sia uguale a zero, e “b” sia diverso da zero**, l’equazione di secondo grado può essere riscritta nella forma normale

$$y = d, \qquad \text{con} \qquad d = c/b$$

Similmente, nel caso in cui **“a” sia diverso da zero, e “b” sia uguale a zero**, l’equazione di secondo grado può essere riscritta nella forma normale

$$x = e, \qquad \text{con} \qquad e = c/a$$

Per trovare una **generica soluzione** dell’equazione, basta assegnare un valore ad un’incognita e trovare il valore dell’altra incognita che verifica l’uguaglianza tra le due espressioni considerate. Poiché le coppie di valori che soddisfano un’equazione di primo grado in due incognite sono infinite, ogni equazione lineare in due incognite è di fatto **indeterminata**.

In generale, un’equazione del tipo

$$a\,x + b\,y = c$$

può essere riscritta come

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\,x \rightarrow y = \alpha + \beta x,$$

dove x ed y sono rispettivamente la variabile indipendente e la variabile dipendente. Tale equazione ha per **diagramma** una retta, della quale α e β indicano rispettivamente l'intercetta con l'asse delle y ed il coefficiente angolare.

5. Risoluzione di una disequazione di primo grado in due incognite

Una disequazione di primo grado in due incognite è una disequazione lineare, la cui **soluzione** è una coppia di valori che verifica la disuguaglianza tra le due espressioni considerate. Utilizzando le operazioni consentite dai principi di equivalenza, ogni disequazione lineare in due incognite può essere riscritta nella forma

$$ax + by > c \qquad \text{(opp. < opp. ≥ opp. ≤)}$$

dove "a", "b" (i "coefficienti" delle incognite) e "c" (il "termine noto") sono numeri interi qualsiasi. Le **soluzioni** di una disequazione in due incognite sono tutte le coppie ordinate di numeri reali che verificano la disuguaglianza.

Nel caso in cui **"a" sia uguale a zero, e "b" sia diverso da zero**, la disequazione di secondo grado può essere riscritta nella forma normale

$$y > d, \quad \text{(opp. < opp. ≥ opp. ≤)} \qquad \text{con} \quad d = c/b$$

Similmente, nel caso in cui **"a" sia diverso da zero, e "b" sia uguale a zero**, la disequazione di secondo grado può essere riscritta nella forma normale

$$x > e, \quad \text{(opp. < opp. ≥ opp. ≤)} \qquad \text{con} \quad e = c/a$$

La soluzione di una disequazione di primo grado in due incognite corrisponde ad uno dei due semipiani nei quali la retta corrispondente all'equazione che eguaglia le due espressioni alla destra ed alla sinistra del segno di disuguaglianza divide un ipotetico piano cartesiano i cui assi misurano i valori assunti dalle incognite x ed y. Per determinare quale semipiano indica l'insieme delle soluzioni, basta sostituire alle incognite una coppia di valori che non si trovi su tale retta. Se la disequazione è verificata, il semipiano a cui appartiene il punto definito dalla coppia di valori considerata (il cosiddetto **punto di prova**) è il semipiano cercato, altrimenti il semipiano da considerare è quello opposto.

B

Sistemi di equazioni lineari in due incognite

1. I sistemi di equazioni di primo grado

Un **problema** può coinvolgere più **condizioni** riferite un insieme di **incognite**. Tali condizioni possono essere definite in forma di **equazione o di disequazione**, e l'insieme delle relazioni oggetto di studio è detto "sistema". La **soluzione di un sistema** è un insieme di numeri che, una volta sostituito all'insieme delle incognite, soddisfa simultaneamente tutte le relazioni che compongono il sistema. Un sistema si dice "**possibile**" se ammette almeno una soluzione, ed "**impossibile**" se non ne ammette alcuna. Un sistema possibile può essere "**determinato**" o "**indeterminato**", a seconda che abbia un numero finito o infinito di soluzioni.

Se in un sistema si sostituisce una equazione o una disequazione con un'altra ad essa equivalente, si ottiene un sistema equivalente a quello dato (**criterio di equivalenza**). Applicando ripetutamente tale criterio, è sempre possibile scrivere un sistema nella sua **forma normale**. Un altro criterio importante nell'analisi dei sistemi è il **criterio di sostituzione**. Tale criterio afferma che, se un'espressione "A" figura in due equazioni di un sistema, risolvendo una equazione rispetto ad "A" e sostituendo ad "A" l'espressione così trovata nell'altra equazione, si ottiene un sistema equivalente a quello di partenza.

La discussione che segue è limitata all'**analisi di un problema consistente in un insieme di condizioni espresse in forma di equazione**, pertanto esclude lo studio dei sistemi di disequazioni. Un modo per classificare un sistema di equazioni è quello di fare riferimento al suo **grado**, pari al prodotto dei gradi delle equazioni che ne fanno parte. In particolare, un **sistema di primo grado di due equazioni in due incognite** è composto da due equazioni di primo grado nelle due incognite considerate.

2. Il criterio di equivalenza ed il criterio di sostituzione

La forma normale di un **sistema lineare di due equazioni in due incognite** è data da:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Il criterio di sostituzione offre due metodi per risolvere un sistema di primo grado di due equazioni in due incognite: il metodo di sostituzione ed il metodo di confronto.

Se si utilizza il **metodo di sostituzione**:

– si risolve una delle due equazioni rispetto ad un'incognita, considerando l'altra incognita come una costante, e si ottiene un'espressione del tipo $y = f(x)$;

– si sostituisce nella seconda equazione $f(x)$ al posto di y, ottenendo un'equazione in un'incognita (x);

– si risolve quest'ultima equazione rispetto ad x, ottenendo $x = x^*$;

sostituendo x^* ad x nell'equazione $y = f(x)$ e risolvendo si trova il valore y^* di y.

Se si utilizza il **metodo di confronto**:

– si risolve la prima equazione rispetto ad un'incognita, ad esempio y, considerando l'altra incognita come una costante, e si ottiene un'espressione del tipo $y = f(x)$;

– si risolve la seconda equazione rispetto alla stessa incognita scelta per risolvere la prima equazione, considerando l'altra incognita come una costante, e si ottiene un'espressione del tipo $y = g(x)$;

– si eguagliano le due espressioni $f(x)$ e $g(x)$, quindi si risolve l'equazione ottenuta rispetto all'unica incognita x, trovando x^*;

– sostituendo x^* ad x in $y = f(x)$ o in $y = g(x)$ si ottiene il corrispondente valore y^* di y.

3. La rappresentazione di un sistema di due equazioni lineari in due incognite

Come già evidenziato in precedenza, un sistema di primo grado di due equazioni in due incognite è un sistema del tipo

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Entrambe le equazioni hanno per diagramma una retta. Chiamando r ed r' le due rette, si ha che:

– se ***r* ed *r'* si intersecano**, il sistema è possibile e determinato, cioè ammette un'unica soluzione;

– se ***r* ed *r'* coincidono**, il sistema è indeterminato, cioè ha infinite soluzioni;

– se ***r* ed *r'* sono parallele e distinte**, il sistema è impossibile, cioè non ha soluzione.

C

Equazioni e disequazioni non lineari: cenni

1. Risoluzione di un'equazione non lineare in un'incognita

Un'equazione non lineare in un'incognita è data da

$$f(x) = 0,$$

dove il termine alla sinistra del segno di uguale indica una **funzione**. In termini molto generali, una funzione indica una **relazione** tra due insiemi, che associa ad ogni elemento dell'**insieme di partenza** un solo elemento dell'**insieme di arrivo**. In particolare, si consideri $f(x)$ come una **funzione ad una variabile reale**, cioè come una funzione caratterizzata da un dominio ed un codominio appartenenti all'insieme dei numeri reali. Risolvere un'equazione non lineare in un'incognita equivale, dunque, a trovare gli **"zeri" o "radici" di una funzione ad una variabile** del tipo

$$y = f(x).$$

Un problema che può essere ricondotto alla ricerca degli zeri di un polinomio di grado n è, ad esempio, quello della ricerca di una **soluzione per l'equazione in due incognite, una volta assegnato un valore ad una di esse**. Tale problema, infatti, può essere scritto come

$$\bar{y} = g(x),$$

e dunque può essere ricondotto alla forma

$$f(x) = g(x) - \bar{y} = 0$$

Un'altra classe di problemi riconducibile alla ricerca degli zeri di un polinomio è quella dei **problemi di punto fisso**. Questi ultimi sono definiti come

$$h(x) = x,$$

e dunque possono essere riscritti come

$$f(x) = g(x) - x = 0$$

2. Risoluzione di una disequazione non lineare in un'incognita

Una **disequazione non lineare in un'incognita** è data da

$$f(x) > 0, \; (opp. < opp. \geq opp. \leq)$$

dove il termine alla sinistra del segno di uguale indica, come nel caso precedente, una funzione ad una variabile reale. Risolvere una disequazione non lineare in un'incognita equivale, dunque, a trovare il segno di un'equazione del tipo

$$y = f(x).$$

Un problema che può essere ricondotto allo studio del segno di un polinomio di grado n è quello dello **studio del segno per un'equazione in due incognite, una volta assegnato un valore ad una di esse**. Tale problema, infatti, può essere ricondotto alla forma

$$f(x) = g(x) - \bar{y} > 0, \; (opp. < opp. \geq opp. \leq)$$

Un'altra classe di problemi riconducibile alla ricerca del segno di un polinomio è quella dei **problemi di punto fisso**. Formalmente, si tratta di risolvere la disequazione

$$f(x) = g(x) - x > 0, \; (opp. < opp. \geq opp. \leq)$$

D

Le derivate

1. Rapporto incrementale e regole di derivazione

Sia $y = f(x)$ una generica funzione ad una variabile reale definita in un sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali, ed x_0 sia un punto interno al dominio. Si osservi una variazione della variabile indipendente da x_0 ad x, e corrispondentemente una variazione di y da $f(x_0)$ a $f(x)$. Definendo

$$\Delta x = x - x_0$$

l'**incremento della variabile indipendente** x dovuto al passaggio da x_0 ad x e definendo

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

il corrispondete **incremento della variabile dipendente**, si vuole misurare il tasso medio di variazione in corrispondenza dell'intervallo $(x_0,\ x)$, cioè il **rapporto incrementale**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

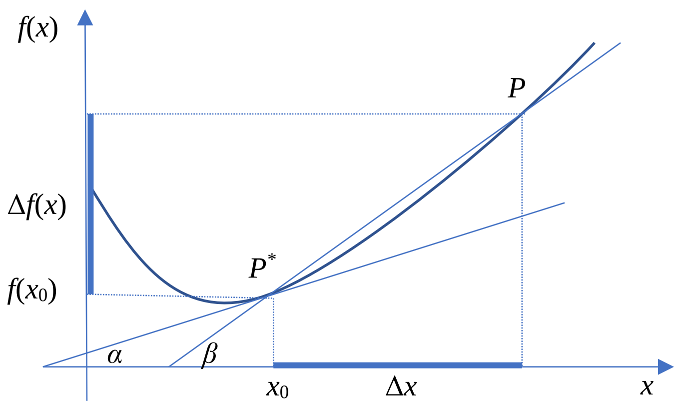
In termini geometrici, il rapporto incrementale della funzione f relativo al punto x_0 e all'incremento Δx è il **coefficiente angolare della retta secante** passante per i punti $P_0(x_0; f(x_0))$ e $P(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Fissato x_0, il rapporto incrementale è una funzione di Δx, o meglio, di x. Al tendere di x ad x_0 anche P tende a P_0.

Il limite del rapporto incrementale, o **derivata prima di *f* (*x*)** nel punto x_0, se esiste, è definito da

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

Dal punto di vista geometrico, la derivata è la **pendenza della retta tangente al grafico della funzione *f* (*x*)** nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$. Dunque, al tendere di P a P_0, il coefficiente della retta secante PP_0 tende a quello della retta tangente in P_0.

Grafico 1 – *Derivata, tangente, secante*



Fonte: ns elaborazione

Si osservi che se una funzione f è derivabile nel punto x_0, allora è anche continua in quel punto. Il contrario, tuttavia, non è vero: **una funzione può essere continua anche in un punto in cui non è derivabile**.

Si osservi inoltre che la funzione $f'(x)$ è essa stessa una funzione di x. Se $f'(x)$ è a sua volta una funzione derivabile, applicando nuovamente il calcolo differenziale è possibile ottenere la **derivata seconda** di $f(x)$. Più in generale, il calcolo differenziale può essere applicato iterativamente alla $f(x)$ e alle sue derivate ennesime, ottenendo **derivate di ordine n + 1**, fintantoché la derivata ottenuta continua ad essere, a sua volta, una funzione derivabile.