Villa Mirafiori, 11 Maggio 2016

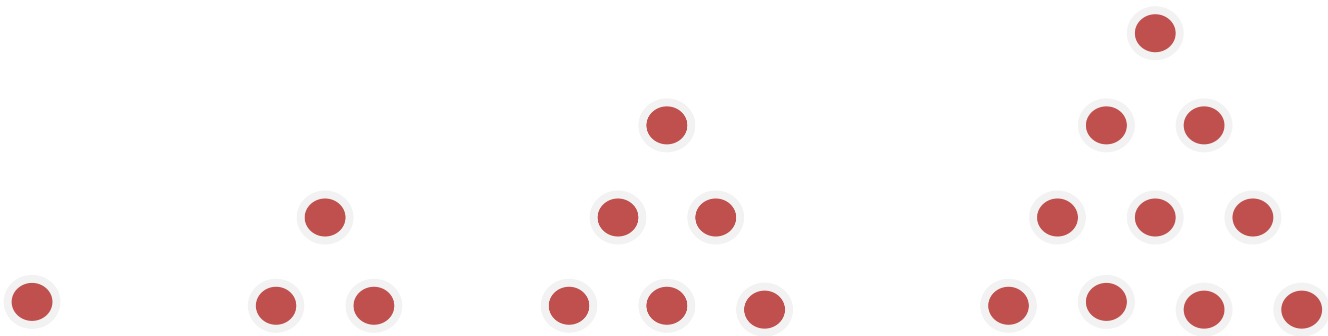
Le conseguenze di Gödel: matematica

Claudio Bernardi (Sapienza)

insieme **N** dei numeri naturali {0, 1, 2, … }

fin dall'antichità sono stati studiati vari tipi di numeri e le loro proprietà; ad esempio, i *numeri triangolari*

1 1 + 2 = 3 1 + 2 + 3 = 6 1 + 2 + 3 + 4 = 10 ...



$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

come ci convinciamo? infiniti controlli?

i numeri primi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

«*esistono infiniti numeri primi*»

altro esempio $n^2 + n + 41$

sostituiamo ad n i numeri 0, 1, 2, 3, ...,

$n = \mathbf{0}$ $0 + 0 + 41 = \mathbf{41}$ $n = \mathbf{1}$ $1 + 1 + 41 = \mathbf{43}$

$n = \mathbf{2}$ $4 + 2 + 41 = \mathbf{47}$ $n = \mathbf{3}$ $9 + 3 + 41 = \mathbf{53}$

abbiamo ottenuto numeri primi

sarà vero per *ogni* numero naturale n ?

la risposta è no, ma il primo numero *non* primo si trova per $n = 40$: $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$

ancora un esempio $n^3 - n$

$n = \mathbf{0}$	$0 - 0 = \mathbf{0}$	$n = \mathbf{1}$	$1 - 1 = \mathbf{0}$
$n = \mathbf{2}$	$8 - 2 = \mathbf{6}$	$n = \mathbf{3}$	$27 - 3 = \mathbf{24}$
$n = \mathbf{4}$	$64 - 4 = \mathbf{60}$	$n = \mathbf{5}$	$125 - 5 = \mathbf{120}$

il risultato sembra sempre un multiplo di 6

dimostriamolo $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)\,n\,(n - 1)$

si tratta del prodotto di tre numeri consecutivi;

fra tre numeri consecutivi c'è un multiplo di 3 e c'è un pari

dimostrazioni e teoremi - metodo assiomatico

accettiamo certe proprietà base (gli *assiomi*);
a partire dagli assiomi, con ragionamenti *controllabili*, troviamo altri enunciati, i teoremi
teoria assiomatica **PA** (*aritmetica Peano*)

dimostrazione come strumento di conoscenza
«far matematica, dopo i Greci, vuol dire dimostrare»
il concetto di dimostrazione è *sintattico* e *finitario*

è necessario distinguere fra
(1) un enunciato A è *vero* in **N**
(2) A è un *teorema* (enunciato dimostrabile) in **PA**
(i teoremi dipendono dagli assiomi scelti)

primo teorema di Gödel : **(1) non equivale ad (2)**

per ogni A, A è vero in **N** oppure ¬ A è vero in **N**
invece, esiste un A tale che né A né ¬ A sono teoremi;
PA è *incompleta*

un ultimo esempio la congettura di Goldbach
«*ogni numero pari* > 4 *è somma di due numeri primi*»
per esempio: 6 = 3 + 3 8 = 5 + 3 10 = 5 + 5 = 7 + 3
12 = 5 + 7 ... 100 = 47 + 53 ...
in generale?
ammesso che sia vero per tutti i numeri pari, siamo sicuri che ci sia *una* dimostrazione?

per ciascun numero pari, possiamo stabilire se è o no somma di due primi;
ma possiamo dimostrare, con un *unico* ragionamento, che l'enunciato vale per *tutti* i numeri pari?

potrebbe capitare che:
la congettura di Goldbach è vera, ma non esiste un ragionamento che si applichi a *tutti* i numeri pari

il teorema di Fermat

$a^n + b^n = c^n$ non ha soluzioni intere positive per $n > 2$
prima di Wiles (1995) erano note dimostrazioni per 3, 4, 5, ...; dimostrazioni sempre più lunghe al crescere di n ??

le aspettative di un matematico quando fa ricerca
analoghe a quelle di uno studente di fronte a un problema

un matematico è portato a pensare

(*a*) *se è sufficientemente colto e bravo, allora è in grado di risolvere un problema* (posto in modo *chiaro*),

(*b*) *non c'è un metodo generale per risolvere tutti i problemi*:

un computer è spesso utile; ma non si può sperare di arrivare a un software che risolva un *qualunque* problema

dai teoremi di Gödel segue che l'aspettativa (*a*) è sbagliata, mentre l'aspettativa (*b*) è corretta

- alcuni problemi non si possono risolvere in linea di principio (ma non sappiamo quali)
- non si può decidere in modo meccanico se una formula è o no un teorema (PA è indecidibile)

PA è incompleta e indecidibile; in altri rami della matematica ci sono teorie complete e teorie decidibili (per es.: sappiamo riconoscere le tautologie)

due esempi di indecidibilità in matematica

- (X *problema di Hilbert*) stabilire se un'equazione del tipo $3xy^3 + yz - x^4z = 7$ ammette soluzioni intere

- il *problema della parola per i gruppi*: esiste un gruppo generato da un insieme finito $\{g, h, ..., k\}$ con certe relazioni (come $g^3 = g$, $hk = kh$) per il quale non siamo in grado di stabilire, in generale, se elementi del tipo hg^2hk e gk^3h^2 sono in realtà lo stesso elemento

molti matematici non si curano troppo dei risultati di Gödel ...
naturalmente, dipende anche dal settore di ricerca

i teoremi di Gödel non forniscono indicazioni pratiche,
ma rendono *più interessante* la ricerca matematica