



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ EDITRICE

ANNALI DEL DIPARTIMENTO DI METODI  
E MODELLI PER L'ECONOMIA  
IL TERRITORIO E LA FINANZA

2019

**Direttore Responsabile - Director**

Alessandra De Rose

**Direttore Scientifico - Editor in Chief**

Roberta Gemmiti

**Curatrici del numero - Managing Editors**

Adriana Conti Puorger, Cristina Giudici

**Comitato Scientifico - Editorial Board**

Maria Giuseppina Bruno (Sapienza Università di Roma)

Adriana Conti Puorger (Sapienza Università di Roma)

Alessandra Faggian (The Ohio State University)

Francesca Gargiulo (Sapienza Università di Roma)

Roberta Gemmiti (Sapienza Università di Roma)

Cristina Giudici (Sapienza Università di Roma)

Ersilia Incelli (Sapienza Università di Roma)

Antonella Leoncini Bartoli (Sapienza Università di Roma)

Isabella Santini (Sapienza Università di Roma)

Marco Teodori (Sapienza Università di Roma)

Catherine Wihtol de Wenden (CERI-Sciences Po-CNRS Paris).

Copyright © 2019

**Sapienza Università Editrice**

Piazzale Aldo Moro 5 – 00185 Roma

[www.editricesapienza.it](http://www.editricesapienza.it)

[editrice.sapienza@uniroma1.it](mailto:editrice.sapienza@uniroma1.it)

Iscrizione Registro Operatori Comunicazione n. 11420

ISSN: 2385-0825

Pubblicato a dicembre 2019



Quest'opera è distribuita  
con licenza Creative Commons 3.0  
diffusa in modalità *open access*.

# OPTION PRICING CON VOLATILITA' STOCASTICA: ANALISI ED IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO DI HESTON

*Abstract.* The present work aims at evaluating options using the Heston model. This model is presented both from a theoretical and a practical point of view. Initially, we review the salient mathematical steps that lead to its formulation. In particular, the hedging portfolio of the underlying asset price and variance is constructed in order to derive the exercise probability of the option. Afterward, some important aspects related to the implementation of the model are analyzed and the main numerical approaches are discussed: the integration methods and the approaches based on the Fast Fourier Transform (FFT) and the Fractional Fast Fourier Transform (FRFT). We then illustrate the minimization methods of the objective function useful to perform the calibration of the model and, finally, we show the results of an empirical analysis carried out on real data.

*Keywords:* Stochastic Volatility, Heston Model, Fast Fourier Transform, Fractional Fast Fourier Transform.

## 1. Modello di Heston

Il modello di Heston (1993) è un importante modello di valutazione delle opzioni finanziarie europee che ipotizza una dinamica stocastica sia per il sottostante sia per la volatilità. Non si tratta dell'unico studio dedicato alla valutazione dei derivati finanziari in tali ipotesi, ma nel corso del tempo è divenuto il riferimento attraverso cui valutare gli altri modelli proposti in letteratura in quanto naturale estensione della famosa formula di Black, Scholes (1973), ampiamente utilizzata nell'ambito delle applicazioni finanziarie.

Nel presente paragrafo, si illustrano le ipotesi alla base del modello e poi si descrivono i principali passaggi matematici necessari alla sua costruzione: la derivazione dell'equazione alle derivate parziali (PDE) del portafoglio di hedging ed il calcolo del prezzo di un'opzione call come sua soluzione in forma semi-chiusa.

### 1.1 Ipotesi

Analogamente a quanto supposto da Black, Scholes, il modello ipotizza che il prezzo del titolo sottostante segua un moto geometrico browniano in cui però la volatilità presente nel termine di diffusione non è supposta costante ma segue un processo stocastico mean-reverting di tipo CIR (Cox, Ingersoll, Ross, 1985).

Il modello suppone in particolare che il prezzo del titolo sottostante l'opzione,  $S_t$ , e la sua varianza,  $v_t$ , soddisfino il seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche bivariate:

$$\begin{cases} dS_t = uS_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_{(1,t)} \\ dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{(2,t)} \end{cases} \quad (1)$$

---

\* Sapienza Università di Roma

in cui:  $u$  è la componente di drift del processo del sottostante;  $k$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  sono rispettivamente la velocità di mean reversion, il livello di mean reversion e la volatilità del processo della varianza; infine  $dW_{(1,t)}$  e  $dW_{(2,t)}$  sono i processi di Wiener standard in forma differenziale rispettivamente per il sottostante e per la varianza. Questi ultimi sono supposti correlati rispetto alla misura di probabilità fisica  $P$  mediante la seguente funzione di correlazione:

$$E^P[dW_{(1,t)}dW_{(2,t)}] = \rho dt \quad (2)$$

dove  $\rho$  è il coefficiente di correlazione tra i due moti browniani.

Ai fini della valutazione risk-neutral, occorre riscrivere le due equazioni differenziali stocastiche contenute nella (1) in modo da esplicitare la componente di premio per il rischio sotto una misura equivalente di probabilità  $Q$ .

Applicando il teorema di Girsanov, si ottiene per la dinamica del sottostante la seguente espressione:

$$dS_t = \delta S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_{(1,t)} \quad (3)$$

da cui:

$$d \ln S_t = \left( \delta - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dZ_{(1,t)} \quad (4)$$

avendo indicato con  $\delta$  il parametro risk free rate. Analogamente, il processo della varianza diventa:

$$dv_t = [k(\theta - v_t) - \lambda(S_t, v_t, t)] dt + \sigma \sqrt{v_t} dZ_{(2,t)} \quad (5)$$

avendo indicato con  $\lambda(S_t, v_t, t)$  la funzione di premio per il rischio (nel modello originario di Heston, si assume in particolare  $\lambda(S_t, v_t, t) = \lambda v_t$ ). Si ha inoltre:

$$\begin{cases} Z_{(1,t)} = \left( W_{(1,t)} + \frac{u - \delta}{\sqrt{v_t}} t \right) \\ Z_{(2,t)} = \left( W_{(2,t)} + \frac{\lambda(S_t, v_t, t)}{\sigma \sqrt{v_t}} t \right) \end{cases} \quad (6)$$

e risulta:

$$E^Q[dZ_{(1,t)}dZ_{(2,t)}] = \rho dt \quad (7)$$

## 1.2 Equazione alle derivate parziali

La derivazione della PDE per il modello di Heston risulta simile a quella sviluppata per il modello di Black, Scholes. Si tratta in altri termini di costruire un portafoglio autofinanziante che garantisca un rendimento privo di rischio a fronte di un qualsiasi andamento del prezzo del titolo sottostante e della volatilità.

Considerata la duplice fonte di aleatorietà, il portafoglio deve in tal caso essere composto dal sottostante e due diversi titoli derivati, genericamente  $U$  e  $V$ . Partendo dall'ipotesi che il portafoglio sia costituito da  $\Delta$  unità di sottostante e  $\varphi$  unità di uno dei due titoli derivati, il suo valore può essere scritto come segue:

$$P_t = U_t + \Delta S_t + \varphi V_t \quad (8)$$

dove  $U_t = U(S_t, v_t, t)$  e  $V_t = V(S_t, v_t, t)$  sono i prezzi dei due titoli derivati.

Dalla (8) segue:

$$dP_t = dU_t + \Delta dS_t + \varphi dV_t \quad (9)$$

e, applicando il Lemma di Ito, si ottiene:

$$\begin{aligned} dP_t = & \left( \frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} + \sigma \rho v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} \right) dt \\ & + \varphi \left( \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial v_t^2} + \sigma \rho v_t S_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial v_t} \right) dt \\ & + \left( \frac{\partial U_t}{\partial S_t} + \varphi \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \Delta \right) dS_t + \left( \frac{\partial U_t}{\partial v_t} + \varphi \frac{\partial V_t}{\partial v_t} \right) dv_t \end{aligned} \quad (10)$$

da cui, al fine di rendere il portafoglio delta e vega neutrale, cioè insensibile a variazioni aleatorie del sottostante e della volatilità, e imponendo quindi l'annullamento dei termini moltiplicativi di  $dS_t$  e  $dv_t$  negli ultimi due addendi al secondo membro della (10), si ha:

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{\frac{\partial U_t}{\partial v_t}}{\frac{\partial V_t}{\partial v_t}} \\ \Delta = -\varphi \frac{\partial V_t}{\partial S_t} - \frac{\partial U_t}{\partial S_t} \end{cases} \quad (11)$$

Per la condizione di non arbitraggio, il rendimento del portafoglio autofinanziante così ottenuto deve uguagliare quello di un titolo privo di rischio. Pertanto, si può scrivere:

$$dP_t = \delta(U_t + \Delta S_t + \varphi V_t) dt \quad (12)$$

Sostituendo nella (10) e tenendo conto della (11), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\left( \frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} + \sigma \rho v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} \right) - \delta U_t + \delta S_t \frac{\partial U_t}{\partial S_t}}{\frac{\partial U_t}{\partial v_t}} \\ &= \frac{\left( \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial v_t^2} + \sigma \rho v_t S_t \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial v_t} \right) - \delta V_t + \delta S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t}}{\frac{\partial V_t}{\partial v_t}} \end{aligned} \quad (13)$$

In condizioni di assenza di opportunità di arbitraggio privo di rischio, ciascun derivato deve inoltre soddisfare l'equazione alle derivate parziali di Black, Scholes estesa al caso di funzione del tempo, del sottostante e della volatilità. Alla luce di essa, il secondo membro della (13) è pari all'opposto della componente di drift del processo di volatilità, pertanto sostituendo ad esso  $-[k(\theta - v_t) - \lambda(S_t, v_t, t)]$  e portando tutto al primo membro, si ottiene:

$$[k(\theta - v_t) - \lambda(S_t, v_t, t)] \frac{\partial U_t}{\partial v_t} - \delta U_t + \delta S_t \frac{\partial U_t}{\partial S_t} + \left( \frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t S_t^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 U_t}{\partial v_t^2} + \sigma \rho v_t S_t \frac{\partial^2 U_t}{\partial S_t \partial v_t} \right) = 0 \quad (14)$$

che, posto  $\lambda(S_t, v_t, t) = \lambda v_t$ , è l'equazione alle derivate parziali di Heston.

### 1.3 Prezzo della call europea

In base alle conclusioni del paragrafo precedente, il prezzo  $U_t$  di un generico derivato deve soddisfare la (14). Nel caso particolare di un'opzione call europea con strike price  $K$  e maturity  $T$ , tenendo conto della definizione, si deve poi avere:

- $U(S_T, v_T, T) = \text{Max}(0, S_T - K)$ ;
- $U(0, v_t, t) = 0$ ;
- $\frac{\partial}{\partial S_t} U(\infty, v_t, t) = 1$ ;
- $\delta S_t \frac{\partial}{\partial S_t} U(S_t, 0, t) + k \theta \frac{\partial}{\partial v_t} U(S_t, 0, t) - \delta U(S_t, 0, t) + \frac{\partial}{\partial t} U(S_t, 0, t) = 0$ ;
- $U(S_t, \infty, t) = S_t$ .

Inoltre, posto  $C_t = U_t$  come sopra esplicitato, il teorema di Feynman, Kac (Baldi, 2017) assicura che:

$$C_t = e^{-\delta(T-t)} E^Q [Max(S_T - K) | F_t] = e^{-\delta(T-t)} E^Q [(S_T - K) 1_{S_T > K} | F_t] \quad (15)$$

dove  $1_{S_T > K}$  è la funzione indicatrice dell'evento  $S_T > K$  e  $F_t$  l'informazione disponibile al tempo  $t$  riferita al prezzo del sottostante ed alla varianza osservata.

Pertanto, in analogia con la formula di Black, Scholes, si cerca una soluzione per  $C_t$  che possa essere scritta nel modo seguente:

$$C_t = e^{x_t} P_1 - K e^{-\delta(T-t)} P_2 \quad (16)$$

dove, posto  $x_t = \ln(S_t)$ ,  $P_1 = P_1(x_t, v_t, t)$  indica il delta della call e  $P_2 = P_2(x_t, v_t, t)$  la probabilità sotto  $Q$  che  $S_T > K$  entrambe condizionate alla filtrazione  $F_t$ . Così, calcolando le derivate parziali della (16) e sostituendo nella (14), è possibile riscrivere la PDE di Heston in termini di  $P_j$ :

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \rho \sigma v_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial v_t \partial x_t} + \frac{1}{2} v_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial v_t^2} + (\delta + u_j v_t) \frac{\partial P_j}{\partial x_t} + (a - b_j v_t) \frac{\partial P_j}{\partial v_t} = 0 \quad (17)$$

con  $j = 1, 2$  e  $u_j = \frac{1}{2}$ ,  $a = k\theta$ ,  $b_1 = k + \lambda - \rho\sigma$ ,  $b_2 = k + \lambda$ .

Introducendo la funzione caratteristica  $f_j(\phi, x_t, v_t)$ , è possibile stimare le suddette probabilità "in the money" avvalendosi del teorema inverso di Gil-Pelaez (1951):

$$P_j(x_t, v_t, t; \ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x_t, v_t)}{i\phi} \right] d\phi \quad (18)$$

in cui:

$$f_j(\phi; x_t, v_t) = e^{(C_j(T-t, \phi) + D_j(T-t, \phi) v_t + i\phi x_t)} \quad (19)$$

con:

$$C_j(T-t, \phi) = \delta i\phi(T-t) + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)(T-t) - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{d_j(T-t)}}{1 - g_j} \right) \right] \quad (20)$$

$$D_j(T-t, \phi) = \left( \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \right) \frac{1 - e^{d_j(T-t)}}{1 - g_j e^{d_j(T-t)}} \quad (21)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)} \quad (22)$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$$

Per una completa trattazione del procedimento risolutivo delle equazioni differenziali ottenute dall'applicazione del teorema di Feynman, Kac alla funzione caratteristica si rimanda a Zwillinger (1997).

## 2. Implementazione

L'implementazione del modello di Heston pone due distinti problemi: da un lato, esistono in letteratura formule risolutive dell'equazione alle derivate parziali di Heston alternative alla (16) per il calcolo del prezzo di un'opzione europea; dall'altro, sia la soluzione proposta da Heston sia le soluzioni alternative richiedono l'applicazione di metodi numerici di calcolo. In questo paragrafo, si analizzano entrambi gli aspetti.

### 2.1 Approcci risolutivi alternativi

Di seguito, si mostrano tre diversi metodi di calcolo del prezzo della call soddisfacenti l'equazione alle derivate parziali di Heston. Il primo approccio presentato consiste in realtà in un accorgimento volto a rendere più efficiente il calcolo della soluzione proposta originariamente da Heston. Gli altri due sono invece metodi basati sull'uso della trasformata di Fourier.

### 2.1.1 Approccio Little Trap

Affinché il calcolo della (18) non sia affetto da instabilità computazionale, si può procedere, come suggerito da Albrecher (2005), alla riformulazione della funzione caratteristica. La rivisitazione del modello prevede che la soluzione del termine  $D_j$  venga moltiplicata al numeratore ed al denominatore per il termine  $e^{-d_j(T-t)}$  ottenendo:

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{-d_j(T-t)}}{1 - c_j e^{-d_j(T-t)}} \right) \quad (23)$$

$$C_j(T-t, \phi) = \delta i\phi(T-t) + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)(T-t) - 2 \ln \left( \frac{1 - c_j e^{d_j(T-t)}}{1 - c_j} \right) \right] \quad (24)$$

in cui:

$$c_j = \frac{1}{g_j} = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}$$

### 2.1.2 Approccio Attari

Attari (2004) riduce l'onerosità computazionale legata all'originario procedimento risolutivo proposto da Heston, unendo i due integrali necessari al calcolo delle probabilità d'esercizio dell'opzione. Il prezzo della call è:

$$C(k) = S_0 - e^{-r(T-t)} K \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} I_A(v) dv \right) \quad (25)$$

in cui:

$$I_A(v) = \frac{(Re(\varphi_{\ln S_t}(v)) + \frac{Im(\varphi_{\ln S_t}(v))}{v}) \cos(v \ln(K)) + (Im(\varphi_{\ln S_t}(v)) - \frac{Re(\varphi_{\ln S_t}(v))}{v}) \sin(v \ln(K))}{1 + v^2} \quad (26)$$

Il termine al quadrato presente al denominatore assicura un tasso di decadimento molto rapido.

### 2.1.3 Approccio Carr, Madan

L'approccio in esame (Carr, Madan, 2001) applica la trasformata di Fourier e calcola il prezzo di un'opzione europea utilizzando esplicitamente la funzione caratteristica di  $\ln S_T$ . Ciò consente di ottenere diversi prezzi per differenti strike eseguendo una sola inversione della trasformata.

Gli autori, posto  $k = \ln K$ ,  $x = x_T = \ln S_T$  e posto essere  $q(x)$  la funzione di densità per  $S_T$ , moltiplicano il prezzo della call  $C(k)$  per l'elemento correttivo  $e^{\alpha k}$ , con  $\alpha > \theta$ , ottenendo:

$$c(k) = e^{\alpha k} C(k) \quad (27)$$

con limite:

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} c(k) = 0$$

Così facendo è possibile effettuare l'integrazione di  $c(k)$  e conseguentemente utilizzare la trasformata di Fourier per determinare  $\psi(v)$ . Successivamente si applica l'antitrasformata di Fourier sul prezzo modificato della call,  $c(k)$ , in modo da risalire a  $C(k)$ .

Di conseguenza:

$$\psi(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} c(k) dk = e^{-\delta(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+iv)k} \left[ \int_k^{+\infty} (e^x - e^k) q(x) dx \right] dk \quad (28)$$

e procedendo con l'inversione degli argomenti d'integrazione ed alla ridefinizione dell'area d'integrazione si ottiene:

$$\psi(v) = e^{-\delta(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \left[ \int_{-\infty}^x (e^{(\alpha+iv)k+x} - e^{(\alpha+iv+1)k}) dk \right] dx = \frac{e^{-\delta(T-t)} \phi(v - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + iv(2\alpha+1)} \quad (29)$$



Il prezzo della call è poi ricavato tramite l'applicazione della trasformata inversa di Fourier al prezzo modificato della call:

$$\begin{aligned} C(k) &= e^{-\alpha k} c(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \psi(v) dv \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} [e^{-ivk} \psi(v)] dv \end{aligned} \quad (30)$$

## 2.2 Metodi numerici di integrazione

Nella formulazione originale di Heston ed in quelle successive di Carr, Madan ed Attari non è possibile ricavare analiticamente la primitiva della funzione integranda, rispettivamente nelle (18), (25) e (30). Di conseguenza, per poter procedere al calcolo dell'integrale è necessario utilizzare un'approssimazione. I metodi più diffusi sono illustrati di seguito (Kahl, Jackel, 2005).

### 2.2.1 Newton, Cotes

Il metodo Newton, Cotes risulta essere di facile applicazione ma prevede una equispaziatura dei punti  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  in cui si suddivide l'intervallo di integrazione, prolungando notevolmente i tempi di calcolo. Da notare che l'intervallo d'integrazione, genericamente indicato con  $[a, b]$ , nella formulazione di Newton, Cotes applicata al caso in esame diviene:  $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ .

Questo metodo viene applicato utilizzando uno dei tre seguenti criteri:

- Punto di Mezzo;
- Trapezoidale;
- Simpson.

Il primo criterio prevede che:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \quad (31)$$

dove  $x_j = a + (j-1)h$  con  $j = 1, \dots, N-1$  e  $h = \left(\frac{b-a}{N-1}\right)$  i cui limiti inferiori e superiori risultano coincidere con  $x_1 = a$  e  $x_N = b$ .

Il secondo criterio utilizza il classico metodo della sommatoria di rettangoli di differente altezza e con lunghezza della base costante:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} f(x_1) + h \sum_{j=2}^{N-1} f(x_j) + \frac{h}{2} f(x_N) \quad (32)$$

Il terzo criterio risulta essere il più preciso. Sono previsti i seguenti pesi:  $w_1 = w_N = h/3$ ;  $w_j = 4h/3$  se il pedice è pari mentre  $w_j = 2h/3$  se dispari. L'approssimazione è così eseguita:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} f(x_1) + \frac{4h}{3} \sum_{j=1}^{N/2-1} f(x_{2j}) + \frac{2h}{3} \sum_{j=1}^{N/2} f(x_{2j-1}) + \frac{h}{3} f(x_N) \quad (33)$$

### 2.2.2 Quadratura Gaussiana

La seconda famiglia di procedure d'integrazione (Henri, 2010) mostra performance migliori in termini di accuratezza e, a differenza della prima, non richiede che i punti siano equispaziati. Di seguito, si espongono i criteri Gauss, Laguerre e Gauss, Legendre.

Gauss, Laguerre effettua la quadratura su  $N$  punti, individuati dalle radici  $x_j$ , per  $j = 1, \dots, N$ , del polinomio  $L_N(x)$  dato da:

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \binom{N}{k} x^k \quad (34)$$

i cui pesi  $w_1, \dots, w_N$  sono definiti come:

$$w_j = \frac{(n!)^2 e^{x_j}}{x_j [L'_N(x_j)]^2} \quad \text{per } j = 1, \dots, N \quad (35)$$

Il metodo Gauss, Legendre prevede l'integrazione su  $[-1, +1]$ , estendibile sul dominio  $[a, b]$  come segue:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx \quad (36)$$

Ai fini del modello di Heston, è possibile porre  $a = 0$  e  $b = \phi_{max}$ . I punti  $(x_1, \dots, x_N)$  sono identificati con le soluzioni del polinomio  $P_N(x)$ :

$$P_N(x) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (-1)^k \binom{N}{k} \binom{2N-2k}{N} x^{N-2k} \quad (37)$$

e i pesi  $(w_1, \dots, w_N)$  sono calcolati come:

$$w_j = \frac{2}{(1-x_j^2)[P'_N(x_j)]^2} \quad \text{con } j = 1, \dots, N. \quad (38)$$

### 2.3 Metodi numerici di calcolo della trasformata di Fourier

Di seguito, si illustrano due metodi numerici di calcolo della trasformata di Fourier. Il primo consiste in una sua discretizzazione, il secondo in una semplice ma utile variante di quest'ultima.

#### 2.3.1 Fast Fourier Transform (FFT)

L'implementazione della FFT avviene attraverso la discretizzazione della trasformata di Fourier. Dal vettore di elementi  $x = x_1, \dots, x_N$  viene generato un altro vettore  $\hat{x} = \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$  mediante la relazione:

$$\hat{x}_k = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x_j \quad \text{con } k = 1, \dots, N. \quad (39)$$

posto essere:

$$x_j = e^{i(b-\ln S_t)v_j} \psi(v_j) w_j \quad (40)$$

Per realizzare la discretizzazione di cui sopra sono necessari  $N^2$  step. L'inversa della trasformata è espressa della relazione:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} \hat{x}_j \quad \text{con } k = 1, \dots, N.$$

La FFT è utilizzata da Carr, Madan per discretizzare l'espressione del prezzo della call  $C(k)$  riconducendola nella forma  $\hat{x}_k$ , al fine di incrementarne la velocità di calcolo.

Riprendendo in particolare la (30), si procede scegliendo il parametro  $\alpha$  in modo da ridurre la variazione della funzione integranda nell'intervallo  $[0, \infty]$ . Si applica poi la regola trapezoidale per eseguire l'integrazione numerica, ponendo pari a  $[0, b]$  il dominio d'integrazione per  $v$  e usando  $N$  punti equidistanti:

$$v_j = (j-1)\eta \quad \text{per } j = 1, \dots, N. \quad (41)$$

dove  $\eta$  è l'incremento.

Il prezzo della call diviene:

$$C(k) = \frac{\eta e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[ e^{-i v_j k} \psi(v_j) \right] w_j \quad (42)$$

con i pesi  $w_1 = w_N = \frac{1}{2}$  e  $w_j = 1$  per  $j = 2, \dots, N-1$ .

Per gli strike in the money è necessario individuare un intorno con centro nel prezzo spot logaritmico  $\log S_t$ . Il range degli strike  $k_u$ , discretizzato su  $N$  punti equidistanti risulta essere:

$$k_u = -b + (u-1)\lambda + \ln S_t \quad \text{per } u = 1, \dots, N. \quad (43)$$

in cui il parametro  $\lambda$  indica l'ampiezza dell'incremento e  $b = \frac{N\lambda}{2}$ .

Esplicitati  $k_u$  e  $v_j$  nell'argomento della sommatoria, si ottiene:

$$C(k_u) \approx \frac{\eta e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[ e^{-i\lambda\eta(j-1)(u-1)} e^{i(b-\ln S_t)v_j} \psi(v_j) \right] w_j. \quad (44)$$

Al fine di ricondurre l'espressione (44) nella forma (39) è però necessario rispettare la seguente regola per  $\eta$  e  $\lambda$ :

$$\lambda\eta = \frac{2\pi}{N} \quad (45)$$

### 2.3.2 Fractional Fast Fourier Transform (FRFT)

La tecnica FRFT (Chourdakis, 2004) prevede la generazione del seguente vettore di punti:

$$\hat{x}_u = \frac{\eta e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[ e^{-i2\pi\beta(j-1)(u-1)} x_j \right] \quad \text{con } u = 1, \dots, N. \quad (46)$$

con:

$$\beta = \frac{\lambda\eta}{2\pi} \quad (47)$$

Ciò richiede la definizione dei due vettori seguenti,  $y$  e  $z$ , di dimensione  $2N$  ciascuno:

$$\begin{aligned} y &= (\{e^{i\pi(j-1)^2\beta} x_j\}_{j=1}^N, \quad \{0\}_{j=1}^N) \\ z &= (\{e^{i\pi(j-1)^2\beta}\}_{j=1}^N, \quad \{e^{i\pi(N-j+1)^2\beta}\}_{j=1}^N) \end{aligned}$$

Ai vettori viene applicata la FFT ottenendo altri due vettori,  $\hat{y} = D(y)$  e  $\hat{z} = D(z)$ . Questi ultimi vengono moltiplicati elemento per elemento ottenendo un vettore  $\hat{h}$  con dimensione  $2N$ :

$$\hat{h} = \hat{y} \odot \hat{z} = \{y_j z_j\}_{j=1}^{2N} \quad (48)$$

Definito poi il vettore  $e$  di dimensione  $2N$  seguente:

$$e = (\{e^{i\pi(j-1)^2\beta}\}_{j=1}^N, \quad \{0\}_{j=1}^N)$$

si giunge alla stima mediante FRFT eseguendo la moltiplicazione:

$$\hat{x} = e \odot D^{-1}(\hat{h}) \quad (49)$$

### 3. Applicazione

In questa sezione si descrive la calibrazione effettuata per il modello di Heston con l'ausilio delle tre differenti metodologie di stima dei prezzi dell'opzione presentate nel paragrafo precedente: la formulazione originaria presentata da Heston, la semplificazione proposta da Attari e la FRFT presentata da Chourdakis.

Tra i metodi di stima dei parametri del modello di Heston, si fa ricorso alla procedura di Mean Squared Error (MSE). Si procede in particolare alla minimizzazione della seguente funzione obiettivo:

$$\frac{1}{N} \sum w_{tk} (C_{tk} - C_{tk}^{\Theta})^2$$

sotto i vincoli:

$$k > 0, \quad \theta > 0, \quad \sigma > 0, \quad v_0 > 0, \quad -1 < \rho < +1$$

dove:  $C(\tau_t, K_k) = C_{t,k}$  è il market price,  $C(\tau_t, K_k; \Theta) = C_{t,k}^{\Theta}$  è il model price e inoltre  $w_{tk} = \frac{1}{|bid_t - ask_t|}$  indica l'elemento correttivo per la liquidità del prezzo dell'opzione.

La calibrazione permette di determinare il set di parametri che consentono di ridurre al minimo le differenze sopra illustrate. La funzione obiettivo scelta risulta essere performante nel caso di opzioni at/in the money o con maturità di medio-lungo periodo.

#### 3.1 Dati di mercato

Dal database Optionistics sono state estrapolate le serie storiche inerenti le opzioni call di tipo europeo scritte sull'indice Nasdaq-100, negoziate sul CBOE con codice NDX, quotate in dollari. Le serie storiche utilizzate sono state filtrate in base ai criteri proposti in Barone-Adesi, Engle, Mancini (2008) tenendo conto delle seguenti caratteristiche:

- maturity compresa tra 30 e 365 giorni;
- volatilità implicita inferiore al valore 0.7;
- prezzo non inferiore a 0.05;
- moneyness, inteso come rapporto tra prezzo corrente del sottostante e strike, compreso tra [0.8; 1.2].

Come riportato nella tabella 1, si ottiene un campione di 105 osservazioni costituite da 15 differenti strike a partire da 4800 sino a 6200 con incrementi di 100 e 7 diverse scadenze pari a 37, 44, 65, 100, 156, 247, 338 giorni.

Ai fini della calibrazione, il tasso risk free, pari a 0,0122, è stato desunto dalla curva dei Treasury presente sul sito del Dipartimento del Tesoro USA, mentre il dividend yield, pari a 0,0111, è stato acquisito dal provider finanziario Bloomberg. Il prezzo di chiusura dell'indice alla data del 12 luglio 2017 è 5778,95\$.

Tabella 1. Database

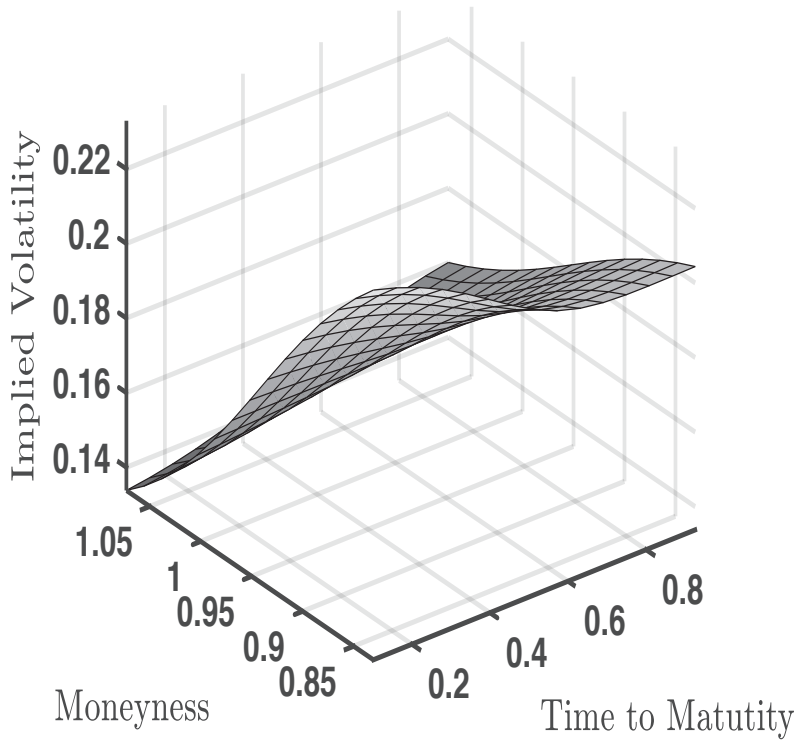
Strike	Bid-Ask	Implied Volatility	Time to Maturity
4800	983,65	0,291433	37
4800	985,05	0,278236	44
4800	991,15	0,25881	65
4800	1005,45	0,246062	100
4800	1021,15	0,216581	156
4800	1058,25	0,201627	247
4800	1098,55	0,192172	338
⋮	⋮	⋮	⋮
6200	1,35	0,107345	37
6200	2,3	0,103721	44
6200	7,2	0,107431	65
6200	22,8	0,115952	100
6200	53,6	0,123534	156
6200	108,85	0,131615	247
6200	170,65	0,139474	338

Fonte: elaborazione propria

Con riferimento alla colonna 3, si ricorda che la volatilità implicita è il livello di volatilità che garantisce l'uguaglianza tra il prezzo dell'opzione ottenuto con un modello teorico e il prezzo osservato sul mercato. Nel caso in esame, la volatilità implicita, ricavata tramite il modello di Black, Scholes, è stata fornita direttamente dal provider Optionistics.

In figura 1, è riportata la superficie di volatilità che emerge dai dati esprimendo la volatilità implicita in funzione della moneyness e della scadenza. Dalla rappresentazione grafica si nota l'irregolarità della superficie che contravviene l'ipotesi di flat volatility presente nel modello di Black, Scholes e che motiva il ricorso al modello di Heston esaminato in questo paper.

Figura 1. Superficie di volatilità



Fonte: elaborazione propria

### 3.2 Calibrazione

Il fitting del modello, realizzato con la minimizzazione del  $MSE$ , è stato eseguito tramite l'applicativo MatLab ricorrendo alla funzione  $FMINCON$ . Il computer impiegato è dotato di processore AMD Ryzen 5 da 2.00 GHz con 8 GB di RAM.

Di seguito i vincoli per i parametri  $[\kappa, \theta, \sigma, v(0), \rho]$  da stimare:

- estremo inferiore :  $[e; e; e; e; -.999]$ ;
- estremo superiore:  $[20; 4; 4; 4; .999]$ ;
- valori iniziali di setup:  $[9; 0.05; 0.3; 0.05; -0.8]$ .

### 3.3 Calcolo dei prezzi

I prezzi delle call sono stati calcolati con tre distinte metodologie.

La prima metodologia utilizza la soluzione originale di Heston e ricorre all'approccio Little Trap presentato nel paragrafo 2.1.1 per la formulazione della funzione caratteristica. Ciò consente di eliminare eventuali discontinuità nella stima delle probabilità  $P_1, P_2$ . Per la soluzione dell'integrale associato alla funzione caratteristica, si è utilizzata la tecnica di quadratura gaussiana con il metodo Gauss-Laguerre descritto nel paragrafo 2.2.2. La discretizzazione dell'integrale è in particolare stata effettuata su un reticolo di 32 punti non equidistanti.

La seconda metodologia segue l'approccio di Attari presentato nel paragrafo 2.1.2 con la medesima tipologia di quadratura precedentemente impiegata.

La terza metodologia utilizza l'approccio Carr, Madan descritto nel paragrafo 2.1.3 con l'applicazione della FRFT così come proposta da Chourdakis e descritta nel paragrafo 2.3.2. Il prezzo della call è quindi ottenuto utilizzando la (46) e la (40). In analogia con Schmelzle (2010), il parametro  $\alpha$  che controlla la pendenza dell'integrale vicino lo  $\theta$  è stato selezionato tra i seguenti valori: [0.75; 1.25; 1.75; 2.25]. Per  $\alpha = 1.75$  si ottengono risultati più accurati in termini di *MSE*. Tra i vantaggi derivanti dell'utilizzo della FRFT figurano: velocità di esecuzione e completa rappresentazione dei prezzi anche in funzione di incrementi ridotti degli strike presenti sulla griglia  $k_u$ .

Le tre differenti modalità di pricing producono i seguenti risultati:

Funzione	kappa	theta	sigma	v0	rho	mse	time
Originale	2.6012	0.0520	0.8226	0.0221	-0.7287	1.1287	16.8127
Attari	2.4594	0.0511	0.8032	0.0221	-0.7273	1.1550	6.8037
FRFT	3.6443	0.0451	0.8536	0.0211	-0.8038	3.6225	1.0982

I parametri stimati presentano le seguenti deviazioni standard:

Funzione	kappa	theta	sigma	v0	rho
Originale	0.3766	0.0054	0.1040	0.0017	0.0503
Attari	1.1724	0.0154	0.1452	0.0017	0.1949
FRFT	1.8090	0.0247	0.2341	0.1147	0.1314

Gli intervalli di confidenza con  $\alpha = 10\%$  risultano essere:

Funzione	kappa	theta	sigma	v0	rho
Originale	[1.975;3.226]	[0.043;0.060]	[0.653;0.999]	[0.019;0.024]	[-0.812;-0.645]
Attari	[0.512;4.405]	[0.025;0.076]	[0.562;1.044]	[0.019;0.024]	[-1.050;-0.403]
FRFT	[0.064;6.647]	[-0.050;0.140]	[0.132;1.574]	[-0.169;0.211]	[-1.021;-0.585]

Si nota che gli intervalli di confidenza riferiti ai parametri  $\theta$  e  $v_0$  della FRFT comprendono il valore nullo risultando poco significativi; al contempo per tutte le estensioni appare significativo il valore del sigma rifiutando l'ipotesi di flat volatility del modello di Black, Scholes.

Raffrontando i valori del *MSE* con i tempi di calcolo, la metodologia originale risulta essere la più precisa ma al contempo la più dispendiosa in termini computazionali. La FRFT registra una netta riduzione del tempo di calcolo anche se a fronte di un rilevante incremento del termine di errore. Un buon risultato è raggiunto dall'estensione proposta da Attari che riesce a ridurre i tempi di calcolo con un contenuto incremento del termine di errore.

Ulteriori evidenze risultano essere:

1. il parametro  $\rho$  assume valore negativo in accordo con la teoria secondo cui l'andamento del prezzo del sottostante ed il livello di volatilità per le opzioni su indice/azioni siano correlati negativamente a causa della presenza di *leverage effect* come descritto in Aharon (2019);
2. il parametro  $\sigma \neq 0$  denota, per la distribuzione dei prezzi logaritmici del sottostante, la presenza di curtosi e *fat tails* contrariamente alle ipotesi poste alla base del modello Black, Scholes come indicato in Heston (1993);
3. la raffigurazione della volatilità implicita mostrata in figura 2 prende forma di skew e non di smile in accordo con la teoria delle opzioni su indici/azioni (Hull, 2009).

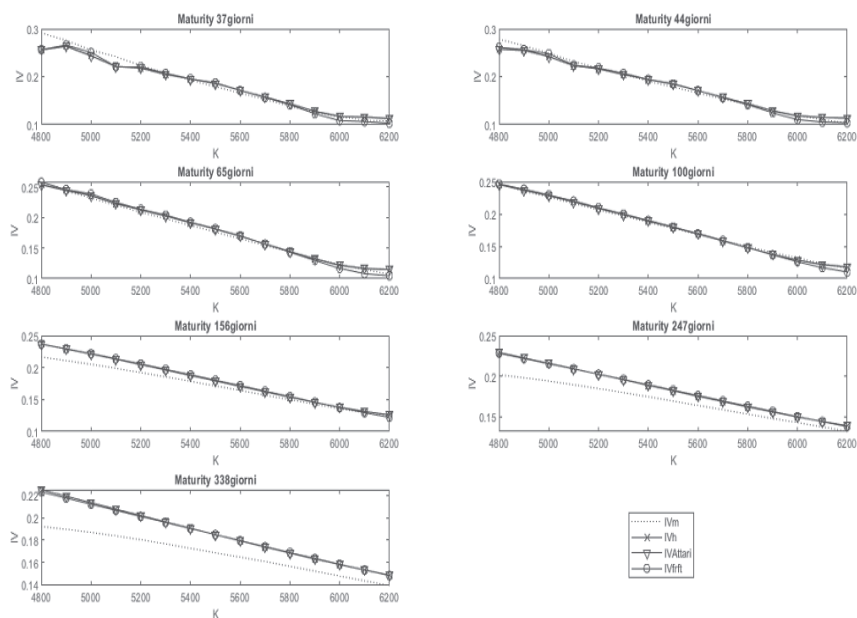
### 3.4 Volatilità implicita

In questo paragrafo, si confrontano sul piano grafico le diverse metodologie di calcolo dei prezzi tramite la stima e la rappresentazione della volatilità implicita in funzione dei diversi strike, per ognuna delle scadenze presenti nel dataset utilizzato per la calibrazione.

Per determinare il livello di volatilità implicita associata ai differenti prezzi del modello di Heston, si è fatto ricorso alla funzione *blsimpv* presente in MatLab.

In figura 2, sono rappresentati i valori delle volatilità implicite derivanti dall'applicazione dei metodi Gauss-Leguerre (IVh), FRFT (IVfrft), Attari (IVAttari) nonché quelli estrapolati dalla serie storica dei dati forniti dal provider finanziario (IVm).

Figura 2. Volatilità implicita riferita alle 7 differenti maturity



Fonte: elaborazione propria

La quasi totale sovrapposibilità dei valori relativi alle tre diverse specificazioni del modello dimostra la bontà del fitting rispetto ai dati di mercato analizzati.

### 4. Conclusioni

Il presente lavoro riguarda la valutazione delle opzioni mediante il modello di Heston. Dopo aver ripercorso i passi salienti che conducono alla sua formulazione sotto il profilo teorico, se ne analizzano alcuni importanti aspetti legati



all'implementazione e si mostrano i risultati di un'applicazione pratica, confrontando i prezzi derivanti da tre diverse metodologie risolutive dell'equazione alle derivate parziali di Heston con le serie storiche dei prezzi di mercato.

Intento futuro degli autori è quello di estendere il modello al caso di un sottostante con dinamica a salti introducendo un processo di Poisson e nel contempo sostituendo il moto browniano standard con un fractional brownian motion.

## Riferimenti bibliografici

- AHARON D., YAGIL Y. (2019), The Impact of Financial Leverage on the Variance of Stock Returns, *International Journal of Financial Studies* 7, 14, 1-18.
- ALBRECHER H., MAYER P., TISTAERT J. (2005), *The Little Heston Trap*. Willmot.
- ANDERSEN L. (2007), *Efficient simulation of the Heston stochastic volatility model*. Bank of America Securities.
- ATTARI M. (2004), *Option Pricing using Fourier Transforms: A Numerically Efficient Simplification*, Working paper, Charles River Associates.
- BARONE-ADESI G., ENGLE R.F., MANCINI L. (2008), A GARCH Option Pricing Model with Filtered Historical Simulation, *Review of Financial Studies* 21, 1223-1258.
- BALDI P. (2017), *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*, Springer.
- BLACK F., SCHOLES M. (1973), The Valuation of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy* 81, 3, 637-654.
- BOSSU S. (2014), *Advanced Equity Derivatives*, Wiley.
- BROADIE M., KAYA O. (2004), Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes, *Operation Research* 54, 2, 217-231.
- BUHLMANN H., DELBEAN F., EMBRECHTS P., SHIRYAEV A. (1996), No arbitrage change of measure and conditional Esscher transforms, *CWI quarterly* 1, 4, 423-432.
- CARR P., MADAN D. (2001), Option Valuation Using the Fast Fourier Transformation, *Journal of Computational Finance* 2, 4, 61-73.
- CHOURDAKIS K. (2004), Option Pricing Using the Fractional FFT, *Journal of Computational Finance* 8, 2, 1-18.
- COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS A. (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385-407.
- FOUQUE J.P., PAPANICOLAOU G., SIRCAR K.R. (2000), *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*, Cambridge University Press.
- GATHERAL J. (2002), *Stochastic volatility and local volatility Case Studies in Financial Modelling Course*, Merrill Lynch.
- GIL-PELAEZ J. (1951), Note on the Inversion Theorem, *Biometrika* 38, 3-4, 481-482.
- HENRI C. (2010), *Numerical Recipes for Number Theory*, Université de Bordeaux.
- HESTON L. (1993), Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options, *The Review of Financial Studies* 6, 2, 327-343.
- HULL J.C. (2009), *Opzioni, Futures e altri Derivati*, Pearson Paravia Bruno Mondadori.
- KAHL C., JACKEL P. (2005), *Not So Complex Logarithms in the Heston Model*, Willmot.
- KILIN F. (2011), Accelerating the Calibration of Stochastic Volatility Model, *The Journal of Derivatives* 18, 3, 7-16.
- KREPS D.M., HARRISON J.M. (1979), Arbitrage in Multiperiod Security Markets, *Journal of Economic Theory* 20, 3, 381-408.
- LEWIS A.L. (2000), *Option Valuation under Stochastic Volatility with Mathematica Code*, Finance Press.
- MASTRO M. (2013), *Financial Derivative and Energy Market Valuation*, Wiley.
- MIKHAILOV S., NOGEL, U. (2003), *Heston's Stochastic Volatility Model Implementation Calibration and Some Extensions*, Wiley.
- MOODLEY N. (2005), *The Heston Model: A Practical Approach*, University of the Witwatersrand, Johannesburg.
- NELDER J.A., MEAD R. (1965), A Simplex Method for Function Minimization, *Computer Journal* 7, 4, 308-313.
- PLISKA S.R., HARRISON J.M. (1981), Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Journal of Economics* 11, 3, 215-260.
- RUDIN W. (1987), *Real and Complex Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, 3rd ed., McGraw-Hill.

SCHMELZLE M. (2010), *Option Pricing Formulae using Fourier Transform: Theory and Application*, preprint.  
ZHLYEVSKYY O. (2012), Efficient Pricing of European-Style Options under Heston's Stochastic Volatility Model, *Theoretical Economics Letters* 2, 16-20.  
ZWILLINGER D. (1997), *Handbook of Differential Equation*, Accademic Press.

<https://www.cboe.com>

<http://www.optionistics.com>

<https://home.treasury.gov>