ESERCITAZIONI DEL CORSO DI MATEMATICA FINANZIARIA (aggiornate alla lezione del 04.05.2020)

Prof. Paolo De Angelis
Sapienza - Università di Roma

CANALE E-M (A.A. 2019/2020)

Esercizio 1

Definire formalmente le seguenti operazioni finanziarie, considerando come unità di misura temporale l'anno:

1. acquisto di un contratto a pronti al prezzo di 100 con scadenza tra 6 mesi ricevendo 150;
2. investimento a termine con pagamento a 3 mesi di 100 euro ricevendo tra 9 mesi un importo d 120;
3. finanziamento di 1000 a fronte del versamento di 5 rate mensili di 250 alla fine di ogni mese;
4. somma delle tre operazioni finanziarie precedenti

Soluzione:

1. $\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}' = \{-100, 150\} \,/\, \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
2. $\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}'' = \{-100, 120\} \,/\, \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$
3. $\underline{\boldsymbol{x}}'''/\underline{\boldsymbol{t}}''' =$ $\{1000, -250, -250, -250, -250, -250\} \,/\, \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right\}$
4. Vogliamo definire un'operazione finanziaria come unione delle precedenti, ovvero

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}' \cup \underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}'' \cup \underline{\boldsymbol{x}}'''/\underline{\boldsymbol{t}}'''$$

...Esercizio 1

A tal fine il primo passo è costruire lo scadenziario comune

$$
\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{t}} &= \underline{\boldsymbol{t}}' \cup \underline{\boldsymbol{t}}'' \cup \underline{\boldsymbol{t}}''' \\
&= \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\} \cup \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right\} \\
&= \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

Per ogni tempo sul nuovo scadenziario ridefiniamo gli importi monetari sommandoli algebricamente, da cui il risultato finale:

$$
\begin{aligned}
&\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \left(\underline{\boldsymbol{x}}' + \underline{\boldsymbol{x}}'' + \underline{\boldsymbol{x}}'''\right)/\underline{\boldsymbol{t}} \\
&\quad = \{1000 - 100, -250, -250, -100 - 250, -250, -250, 150, 120\}/\underline{\boldsymbol{t}} \\
&\quad = \{900, -250, -250, -350, -250, -250, 150, 120\}/ \\
&\qquad \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Nel regime di interesse semplice (RIS) si calcoli il montante considerando i seguenti dati (gli importi sono in euro):

1) $C = 1000$, tasso trimestrale $i = 5,00\%$, $t = 1$ trimestre;
2) $C = 2000$, tasso semestrale $i = 2,00\%$, $t = 3$ semestri;
3) $C = 2500$, tasso annuo $i = 6,00\%$, $t = 1,5$ anni;

Svolgimento: Come noto, il montante è dato da

$$M(t) = C + I(t), \tag{1}$$

dove C è il capitale considerato e $I(t)$ l'interesse maturato nell'intervallo di tempo considerato. Nel regime considerato

$$I(t) = C \cdot i \cdot t. \tag{2}$$

Dalla (1), segue, facilmente

$$M(t) = C + I(t) = C + C \cdot i \cdot t = C \cdot (1 + i \cdot t) = C \cdot r(t), \tag{3}$$

dove $r(t)$, come noto, è il fattore di capitalizzazione nel regime considerato.

1) $C = 1000$, tasso trimestrale $i = 5,00\%$, $t = 1$ trimestre.

$$I(1) = C \cdot i \cdot t = 1000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 1 = 50. \tag{4}$$

$$M(1) = C + I(1) = 1000 + 50 = 1050. \tag{5}$$

In forma equivalente, da $r(1) = 1 + 0,05 \cdot 1 = 1,05$, segue

$$M(1) = C \cdot r(1) = 1000 \cdot 1,05 = 1050. \tag{6}$$

.

...Esercizio 2

2) $C = 2000$, tasso semestrale $i = 2,00\%$, $t = 3$ semestri.

$$I(3) = C \cdot i \cdot t = 2000 \cdot \frac{2}{100} \cdot 3 = 120. \tag{7}$$

$$M(3) = C + I(3) = 2000 + 120 = 2120. \tag{8}$$

In forma equivalente, da $r(3) = 1 + 0,02 \cdot 3 = 1,06$, segue

$$M(3) = C \cdot r(3) = 2000 \cdot 1,06 = 2120.$$

.

...Esercizio 2

3) $C = 2500$, tasso annuo $i = 6,00\%$, $t = 1,5$ anni.

$$I(1,5) = C \cdot i \cdot t = 2500 \cdot \frac{6}{100} \cdot 1,5 = 225. \tag{9}$$

$$M(1,5) = C + I(1,5) = 2500 + 225 = 2725. \tag{10}$$

In forma equivalente, da $r(1,5) = 1 + 0,06 \cdot 1,5 = 1,09$, segue

$$M(1,5) = C \cdot r(1,5) = 2500 \cdot 1,09 = 2725. \tag{11}$$

Esercizio 3

Nel RIS calcolare il tempo necessario affinché un certo capitale, impiegato al tasso annuo del $12,67\%$, produca um montante pari al suo triplo.

Svolgimento E' noto che

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t). \tag{12}$$

Il problema richiede di determianre il tempo t tale che $M(t) = 3 \cdot C$. Segue

$$3 \cdot C = C \cdot (1 + i \cdot t). \tag{13}$$

Il tempo si ottiene risolvendo, nell'incognita t l'equazione (13). Dalla (13), si osserva che

$$3 \cdot \cancel{C} = \cancel{C} \cdot (1 + i \cdot t),$$

ovvero

$$3 = 1 + i \cdot t \quad \Longleftrightarrow \quad i \cdot t = 3 - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{2}{i}. \tag{14}$$

...Esercizio 3

Con i dati del problema, dalla (14), con $i = \frac{12{,}67}{100} = 0,1267$, segue

$$t = \frac{2}{i} = \frac{2}{0,1267} = 15,7853 \quad \text{anni.} \tag{15}$$

Cerchiamo di essere più precisi.

- $15,7853$ anni corrispondono a 15 anni e $0,7853$ frazioni di anno.
- Con la convenzione di considerare un anno composto da 12 mesi, $0,7853$ anni corrispondono a $0,7853 \cdot 12 = 9,4236$.
- $9,4236$ mesi corrispondono a 9 mesi e $0,4236$ frazioni di mese.
- Con la convenzione di considerare un mese composto da 30 giorni, $0,4236$ mesi corrispondono a $0,4236 \cdot 30 = 13$ giorni.
- In conclusione $15,7853$ anni corrispondono a circa 15 anni, 9 mesi e 13 giorni.

Esercizio 4

Nel RIS calcolare il tasso necessario affinché un certo capitale, impiegato per $t = 3$ quadrimestri, produca un montante pari al suo doppio.

Svolgimento E' noto che

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t). \tag{16}$$

Il problema richiede di determianre il tasso i tale che $M(t) = 2 \cdot C$ nel tempo indicato. Segue

$$2 \cdot C = C \cdot (1 + i \cdot t). \tag{17}$$

Il tasso si ottiene risolvendo, nell'incognita i l'equazione (17). Dalla (13), si osserva che

$$2 \cdot \cancel{C} = \cancel{C} \cdot (1 + i \cdot t),$$

ovvero

$$2 = 1 + i \cdot t \quad \Longleftrightarrow \quad i \cdot t = 2 - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad i = \frac{1}{t}. \tag{18}$$

...Esercizio 4

Con i dati del problema, dalla (18), con $t = 3$ quadrimesri, segue

$$i = \frac{1}{3} = 0,3333 \quad \text{quadrimestrale.} \tag{19}$$

In forma equivalente $i = 33,33\%$ quadrimestrale.

Verifica

Consideriamo, ad esempio $C = 1000$. Allora

$$M(3) = 1000 \cdot (1 + 0,3333 \cdot 3) = 2000 = 2 \cdot C. \tag{20}$$

Esercizio 5

Nel RIS calcolare il capitale che impiegato per $t = 2$ trimestri al tasso $i = 3,00\%$ trimestrale, permetta di realizzare un montante pari ad $M = 2000$:

Svolgimento: E' noto che

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) = C \cdot r(t). \tag{21}$$

Dalla (21) e dalla relazione fondamentale $\frac{1}{r(t)} = v(t)$ si ottiene

$$C = M \cdot v(t). \tag{22}$$

Con i dati del problema si ha

$$r(2) = 1 + 0,03 \cdot 2 = 1,06 \quad \Longleftrightarrow \quad v(2) = \frac{1}{1,06} = 0,9434.$$

Infine

$$C = 2000 \cdot 0,9434 = 1886,80. \tag{23}$$

Esercizio 6

Vogliamo investire 1000 euro per ottenere 1500 euro secondo un tasso d'interesse effettivo biennale del 10%. Determinare il tempo d'impiego necessario per raggiungere il montante obiettivo secondo le condizioni poste. Si consideri il regime dell'interesse nticipato.

Svolgimento:

$$v(t) = 1 - d(t). \tag{24}$$

Per il periodo unitario si ha:

$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{\cancel{1} + i - \cancel{1}}{1+i} = \frac{i}{1+i}. \tag{25}$$

Ora, noto d, si ha

$$M(t) = C \cdot r(t) = C \cdot \frac{1}{v(t)} = C \cdot \frac{1}{1 - d \cdot t}. \tag{26}$$

Combinando la (25) e la (26) si ha

$$M(t) = C \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{1+i} \cdot t} \tag{27}$$

Con i dati del problema si ha

$$1500 = 1000 \cdot \frac{1}{1 - \frac{0.1}{1.1} \cdot t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1500} = \frac{1 - \frac{0,1}{1,1} \cdot t}{1000}. \tag{28}$$

Infine

$$t = \left(1 - \frac{1000}{1500}\right) \cdot \frac{1,1}{0,1} = 3,67. \tag{29}$$

Esercizio 7

Un capitale iniziale di 500 euro, impiegato per 18 mesi, genera un capitale finale di 1500 euro. Determinare il tasso di sconto annuale relativo all'operazione.

E' noto che

$$M = C \cdot \frac{1}{v(t)} = C \cdot \frac{1}{1 - d \cdot t}. \tag{30}$$

Con semplici passaggi,

$$\frac{M}{C} = \frac{1}{1 - d \cdot t} \iff \frac{C}{M} = 1 - d \cdot t \iff d = \frac{1}{t} \cdot \left(1 - \frac{C}{M}\right). \tag{31}$$

Con i dati del problema, si ha che $t = 18$ mesi è equivalente a $t = \frac{18}{12} = 1,5$ anni. Si ha

$$1500 = 500 \cdot \frac{1}{1 - d \cdot 1,5} \quad \Longleftrightarrow \quad d = \frac{1}{1,5} \cdot \left(1 - \frac{500}{1500}\right) = 0,4444. \tag{32}$$

Verifica

$$500 \cdot \frac{1}{1 - 0,4444 \cdot 1,5} = 1500. \tag{33}$$

Esercizio 8

Si consideri il tasso di sconto effettivo periodale $d(t)$. Determinare il tasso $i(t)$ periodale equivalente.

Svolgimento:
E' noto che:

- $d(t) = d \cdot t$;
- $v(t) = 1 - d(t)$
- $r(t) = \frac{1}{v(t)}$.

Ora

$$r(t) = 1 + i(t) = \frac{1}{1 - d(t)} = \frac{1}{v(t)}. \tag{34}$$

$$1 + i(t) = \frac{1}{1 - d(t)}. \tag{35}$$

Segue

$$1 + i(t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} \iff i(t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} - 1. \tag{36}$$

$$i(t) = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + d \cdot t}{1 - d \cdot t}. \tag{37}$$

In conclusione

$$i(t) = \frac{d \cdot t}{1 - d \cdot t}. \tag{38}$$

Esercizio 9

Si consideri la seguente funzione valore nella variabile $t = t_n - t_0$ durata dell'operazione finanziaria

$$f(t) = \frac{2t + 1}{t + 1}$$

Determinare:

1. se la funzione data è una legge di capitalizzazione;
2. il tasso d'interesse effettivo periodale;

Soluzione

1. Affinchè la funzione valore considerata sia una legge di capitalizzazione deve verificarsi che:
   - sia definita per ogni valore $t \geq 0$.
     Determinando il dominio della funzione valore si nota che essa è definita per tutti quei valori $t \neq -1$ ed essendo $t \geq 0$ (consideriamo solo tempi non negativi), allora la funzione valore data è definita per ogni t di nostro interesse.

- per il PEF, se non c'è differimento temporale allora gli importi non subiscono alcuna variazione di valore. Motivo per cui dovrà aversi che $f(0) = 1$. Nel nostro caso si ha:

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = 1$$

Soddisfacendo la condizione richiesta.

- Sempre per il PEF, allo scorrere del tempo una legge di capitalizzazione è tale se accresce il capitale inziale. Questo significa che a incrementi di tempo devono corrispondere incrementi della funzione valore, ovvero $f'(t) > 0$.
  Nel nostro caso:

$$f'(t) = \frac{2 \cdot (t+1) - (2t+1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2} > 0 \quad \forall\ t \geq 0$$

  Pertanto, la funzione valore data è una legge di capitalizzazione.

1. Sfruttando le relazioni fondamentali sappiamo che $i(t) = r(t) - 1$, dove $r(t)$ è la nostra legge di capitalilzzaione, ovvero $r(t) = f(t)$. Quindi si ha:

$$i(t) = \frac{2t+1}{t+1} - 1 = \frac{2t+1-t-1}{t+1} = \frac{t}{t+1}$$

Esercizio 10

Nel regime dell'interesse composto (RIC), calcolare il montante relativo alle seguenti operazioni di investimento:

1. euro 1500, tasso annuo $4,00\%$, 2 anni;
2. euro 2000, tasso annuo $5,00\%$, 5 anni e 2 mesi;
3. euro 3000, tasso annuo $6,00\%$, 110 giorni.

Svolgimento:
Come noto, il montante è dato da

$$M(t) = C + I(t), \tag{39}$$

dove C è il capitale considerato e $I(t)$ l'interesse maturato nell'intervallo di tempo considerato. Consideriamo, per il momemto il tempo unitario in anni. Sia i il tasso d'interesse applicano nel periodo considerato e si supponga l'operazione abbia durata 2 anni. Alla fine del primo anno, matura un montante

$$M_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i). \tag{40}$$

...Esercizio 10

Nel regime considerato, all'inizio del secondo anno, viene investito, alle stesse condizioni precedenti, il capitale M_1 con il risultato, alla fine del secondo anno:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1 \cdot (1 + i). \tag{41}$$

Dalla (40), cioè $M_1 = C \cdot (1 + i)$, segue

$$M_2 = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2. \tag{42}$$

Per un generico periodo di durata t:

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t. \tag{43}$$

Applichiamo la (43) per risolvere i quesiti proposti.

Quindi, per la (43):

1. euro 1500, tasso annuo 4, 00%, 2 anni:
$$M = 1500 \cdot (1 + 0,04)^2 = 1622,40. \tag{44}$$
2. euro 2000, tasso annuo 5, 00%, 5 anni e 2 mesi:
$$M = 2000 \cdot (1 + 0,05)^{5+\frac{2}{12}} = 2573,40. \tag{45}$$
3. euro 3000, tasso annuo 6, 00%, 110 giorni:
$$M = 3000 \cdot (1 + 0,06)^{\frac{110}{365}} = 3053,15. \tag{46}$$

Esercizio 11

Si consideri nel RIC un capitale di euro 1500 investito per un certo periodo di tempo ad un tasso annuo pari al $4,25\%$. Si calcoli la durata dell'operazione sapendo che la stessa permette di realizzare un montante di euro $2028,35$.

Svolgimento.
Nel regime considerato

$$M = C(1+i)^t. \tag{47}$$

Il problema in questione chiede di calcolare la durata dell'operazione. Si deve risolvere l'equazione (47) nell'incognita t. Allora

$$(1+i)^t = \frac{M}{C}. \tag{48}$$

Si ha

$$\log(1+i)^t = \log\left(\frac{M}{C}\right). \tag{49}$$

Dalla (49), per una delle la proprietà dei logaritmi[1]

$$t\log(1+i) = \log\left(\frac{M}{C}\right). \tag{50}$$

[1] $\log \alpha^\beta = \beta \log \alpha$

...Esercizio 11

Infine, dalla (50)

$$t = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}. \tag{51}$$

Con i dati del problema

$$t = \frac{\log\left(\frac{2028{,}35}{1500}\right)}{\log(1+\frac{4{,}25}{100})} = 7,25 \text{ anni}. \tag{52}$$

Chiaramente, $7,25$ anni corrisponde a 7 anni e 3 mesi $(0,25 \cdot 12)$.

Esercizio 12

Nel RIC si consideri un capitale di euro 2000 che investito per anni 7 e mesi 3 permette di realizzare un montante pari ad euro $2898,28$. Si calcoli il tasso annuo dell'operazione.

Svolgimento.
Nel regime considerato

$$M = C(1+i)^t. \tag{53}$$

Il problema in questione chiede di calcolare la durata dell'operazione. Si deve risolvere l'equazione (53) nell'incognita i.
Allora

$$(1+i)^t = \frac{M}{C}. \tag{54}$$

Si ha

$$\left((1+i)^t\right)^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}}. \tag{55}$$

Applichiamo, nella (55), la nota regola $\left((a)^b\right)^c = a^{b\cdot c}$.

Dalla (55)

$$(1+i)^{\cancel{t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}} = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}}. \tag{56}$$

Infine, da

$$1+i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}}, \tag{57}$$

segue

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1. \tag{58}$$

...Esercizio 12

Dalla (58), con i dati del problema

$$i = \left(\frac{2898,28}{2000}\right)^{\frac{1}{7+\frac{3}{12}}} - 1 = 0,0525 \text{ annuo.} \tag{59}$$

Ovvero $i = 5,25\%$ annuo.

Esercizio 13

Nel regime dell'interesse composto (RIC), si considerino le due operazioni di investimento:

1. euro 1500, tasso annuo $20,00\%$, 2 anni e 6 mesi;
2. euro 2000, 2 anni e 6 mesi ad un certo tasso i_2.

Si calcoli il tasso d'interesse annuo i_2 che permetta, per le due operazioni, di raggiungere lo stesso risultato a scadenza.

Svolgimento.
Nel regime considerato
$$M = C(1+i)^t. \tag{60}$$
Con riferimento alle due operazioni del problema poniamo

1. $C_1 = 1500$, tasso annuo $i_1 = 20,00\%$, $t_1 = 2$ anni e 6 mesi;
2. $C_2 = 2000$, $t_2 = 2$ anni e 6 mesi. i_2 annuo?

Dalla (60) si ha

1. $M_1 = C_1 \cdot (1+i_1)^{t_1}$;
2. $M_2 = C_2 \cdot (1+i_2)^{t_2}$.

L'obiettivo finale è raggiunto se

$$M_1 = M_2. \tag{61}$$

Osservando che

1. $M_1 = C_1 \cdot (1 + i_1)^{t_1}$;
2. $M_2 = C_2 \cdot (1 + i_2)^{t_2}$.

Sostitendo nella (61) si ha

$$C_1 \cdot (1 + i_1)^{t_1} = C_2 \cdot (1 + i_2)^{t_2}. \tag{62}$$

Per risolvere il problema occore risolvere l'equazione (62) nell'incognita i_2.

Dalla (62) segue facilmente

$$(1+i_2)^{t_2} = \frac{C_1}{C_2} \cdot (1+i_1)^{t_1}. \tag{63}$$

Poi

$$\left((1+i_2)^{t_2}\right)^{\frac{1}{t_2}} = \left(\frac{C_1}{C_2} \cdot (1+i_1)^{t_1}\right)^{\frac{1}{t_2}}. \tag{64}$$

Dalla regola delle potenze vista nel precedente esercisio, segue facilmente

$$(1+i_2)^{\frac{t_2}{t_2}} = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{t_2}} \cdot (1+i_1)^{\frac{t_1}{t_2}}. \tag{65}$$

Osservando che, in base ai dati del problema, $t_1 = t_2$, la (65) diventa

$$1 + i_2 = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{t_2}} \cdot (1 + i_1). \tag{66}$$

Infine

$$i_2 = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{t_2}} \cdot (1 + i_1) - 1. \tag{67}$$

Sostituendo i dati del problema nella (67) ed osservando che $t_1 = t_2 = 2,5$ anni, si ottiene

$$i_2 = \left(\frac{1500}{2000}\right)^{\frac{1}{2,5}} \cdot (1 + 0,2) - 1 = 0,069561475. \tag{68}$$

Ovvio che i_2 è un tasso annuo.

Verifica

1. $M_1 = C_1 \cdot (1 + i_1)^{t_1} = 1500 \cdot (1 + 0,2)^{2,5} = 2366,16;$
2. $M_2 = C_2 \cdot (1 + i_2)^{t_2} = 2000 \cdot (1 + i_2)^{2,5} = 2366,16.$

In conclusione i_2 è tale che $M_1 = M_2$.

Esercizio 14

Nel RIC si consideri un'operazione di investimento che permette di realizzare un montante pari ad euro $2898,28$. Conoscendo che la durata dell'operazione è di anni 7 e mesi 3 e che è stato applicato un tasso del $i = 5,25\%$ annuo, si calcoli il capitale investito.

Svolgimento.
Nel regime considerato

$$M = C(1+i)^t. \tag{69}$$

Il problema in questione chiede di calcolare lil capitale . Si deve risolvere l'equazione (69) nell'incognita C.
Allora

$$C(1+i)^t \cdot (1+i)^{-t} = M \cdot (1+i)^{-t}. \tag{70}$$

Ora, essendo

$$(1+i)^t \cdot (1+i)^{-t} = 1. \tag{71}$$

segue, banalmente

$$C = M \cdot (1+i)^{-t}. \tag{72}$$

Dalla (72), con i dati del probelma

$$C = 2898,28 \cdot (1 + \frac{5,25}{100})^{-(7+\frac{3}{12})} = 2000. \tag{73}$$

Esercizio 15

Si consideri un tasso effettivo d'interesse su base bimestrale dell'1%. Considerando sia il RIS che il RIC e avendo a riferimento l'anno commerciale, determinare:

1. il tasso effettivo d'interesse giornaliero;
2. il tasso effettivo d'interesse mensile;
3. il tasso effettivo d'interesse trimestrale;
4. il tasso effettivo d'interesse su 9 mesi;
5. il tasso effettivo d'interesse annuale

Per ognuno dei precedenti verificare la corretteza dell'equivalenza considerando un investimento di 100 per 10 mesi.

...Esercizio 15

Soluzione

Il dato di partenza è un tasso effettivo bimestrale, motivo per cui il periodo unitario originario di riferimento è il bimestre (60 giorni considerando l'anno commerciale come convenzione di conta). Dunque, considerando il bimestre come periodo unitario avremo i seguenti montanti a scadenza (tra 10 mesi):

- **RIS** $\Rightarrow M = 100 \cdot (1 + 0,01 \cdot 5) = 105$
- **RIC** $\Rightarrow M = 100 \cdot (1 + 0,01)^5 = 105,10$

...Esercizio 15 [Tasso d'interesse giornaliero]

1. Tasso effettivo d'interesse giornaliero

In primis, esprimiamo la nuova base temporale $t^{'}$ (giornaliera) in funzione di quella originaria t (bimestrale). Per far ciò, basta definire $t^{'} = t \cdot m$.

Indicato con t il periodo unitario, ovvero il bimestre, si avrà $t = 1$, mentre m è il numero di sottoperiodi (giorni) del periodo unitario, per cui $m = 60$. Pertanto, si ottiene $t^{'} = 1 \cdot 60 = 60$, ovvero 60 giorni in un bimestre.

- Nel **RIS** si ha:

$$\begin{aligned} 1+0,01 &= 1+i_{60}\cdot 60 \\ i_{60} &= \frac{\cancel{1}+0,01-\cancel{1}}{60} \\ i_{60} &= \frac{0,01}{60} \approx 0,0167\% \end{aligned} \tag{74}$$

Verifichiamo ora che con il tasso equivalente ottenuto su base giornaliera si pervenga allo stesso montante finale, ovvero quello inizialmente calcolato secondo il tasso d'interesse bimestrale:

$$M = 100\cdot(1+0,000167\cdot \underbrace{300}_{giorni\ in\ 10\ mesi}) = 105 \tag{75}$$

...Esercizio 15 [Tasso d'interesse giornaliero]

- Nel **RIC** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= (1 + i_{60})^{60} \\ i_{60} &= (1 + 0,01)^{\frac{1}{60}} - 1 \approx 0,0165\% \end{aligned} \tag{76}$$

Verifichiamo ora che con il tasso equivalente ottenuto su base giornaliera si pervenga allo stesso montante finale, ovvero quello inizialmente calcolato secondo il tasso d'interesse bimestrale:

$$M = 100 \cdot (1 + 0,000165)^{300} = 105,1. \tag{77}$$

In questo caso abbiamo che $t^{'}$ è espresso in mesi ed essendoci $m = 2$ mesi in un bimestre ne deriva che $t^{'} = 1 \cdot 2 = 2$. L'associato tasso d'interesse equivalente a quello bimestrale è:

- Nel **RIS** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= 1 + i_2 \cdot 2 \\ i_2 &= \frac{0,01}{2} \approx 0,005 \end{aligned} \tag{78}$$

Da cui l'associato montante

$$M = 100 \cdot (1 + 0,005 \cdot 10) = 105 \tag{79}$$

- Nel **RIC** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= (1 + i_2)^2 \\ i_2 &= (1 + 0,01)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 0,00499 \end{aligned} \tag{80}$$

da cui il montante finale:

$$M = 100 \cdot (1 + 0,00499)^{10} = 105,1 \tag{81}$$

...Esercizio 15 [Tasso d'interesse trimestrale]

In questo caso abbiamo che $t^{'}$ è espresso in trimestri, per cui la nuova base temporale risulta essere un multiplo di quella iniziale e non il viceversa. Pertanto, avremo che esistono $m = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ bimestri in un trimestre derivandone che $t^{'} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. L'associato tasso d'interesse trimestrale equivalente a quello bimestrale è:

- Nel **RIS** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= 1 + i_{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \\ i_{\frac{3}{2}} &= 0,01 \cdot \frac{3}{2} = 0,015 \end{aligned} \tag{82}$$

Da cui l'associato montante

$$M = 100 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{10}{3}) = 105 \tag{83}$$

- Nel **RIC** si ha:

$$\begin{aligned} 1+0.01 &= \left(1+i_{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\ i_{\frac{3}{2}} &= (1+0,01)^{\frac{3}{2}}-1 = 0,01504 \end{aligned} \tag{84}$$

da cui il montante finale:

$$M = 100 \cdot (1+0,01504)^{\frac{10}{3}} = 105,1 \tag{85}$$

In questo caso abbiamo che il nuovo periodo $t^{'}$ è definito su 9 mesi, per cui la nuova base temporale risulta essere un multiplo di quella iniziale e non il viceversa. Pertanto, avremo che esistono $m = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ bimestri in 9 mesi derivandone che $t^{'} = 1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$. L'associato tasso d'interesse su 9 mesi equivalente a quello bimestrale è:

- Nel **RIS** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= 1 + i_{\frac{9}{2}} \cdot \frac{2}{9} \\ i_{\frac{9}{2}} &= 0,01 \cdot \frac{9}{2} = 0,045 \end{aligned} \tag{86}$$

  Da cui l'associato montante

$$M = 100 \cdot (1 + 0,045 \cdot \frac{10}{9}) = 105 \tag{87}$$

- Nel **RIC** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= \left(1 + i_{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{2}{9}} \\ i_{\frac{9}{2}} &= \left(1 + 0,01\right)^{\frac{9}{2}} - 1 = 0,04579 \end{aligned} \tag{88}$$

da cui il montante finale:

$$M = 100 \cdot (1 + 0,04579)^{\frac{10}{9}} = 105,1 \tag{89}$$

In questo caso abbiamo che il nuovo periodo $t^{'}$ è definito su 1 anno, per cui la nuova base temporale risulta essere un multiplo di quella iniziale e non il viceversa. Pertanto, avremo che esistono $m = 6$ bimestri in 1 anno derivandone che $t^{'} = 1 \cdot 6 = 6$. L'associato tasso d'interesse annuale equivalente a quello bimestrale è:

- Nel **RIS** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= 1 + i_6 \cdot \frac{1}{6} \\ i_6 &= 0,01 \cdot 6 = 0,06 \end{aligned} \tag{90}$$

Da cui l'associato montante

$$M = 100 \cdot (1 + 0,06 \cdot \frac{10}{12}) = 105 \tag{91}$$

- Nel **RIC** si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 0,01 &= (1 + i_6)^{\frac{1}{6}} \\ i_6 &= (1 + 0,01)^6 - 1 = 0,0615 \end{aligned} \tag{92}$$

da cui il montante finale:

$$M = 100 \cdot (1 + 0,0615)^{\frac{10}{12}} = 105,1 \tag{93}$$

Esercizio 16

Il sig. Rossi investe $C = 3000$ euro per un anno nel RIC. Nei primi 8 mesi tale somma matura ad un tasso d'interesse nominale su base semestrale convertibile mensilmente del 2%, mentre per i restanti 4 mesi secondo un tasso d'interesse effettivo quadrimestrale equivalente a quello nominale applicato nei primi 8 mesi.

Determinare:

A. Il montante alla fine dell'anno e il tasso di rendimento complessivo dell'operazione finanziaria;

B. Il tasso di sconto effettivo equivalente al tasso d'interesse nominale;

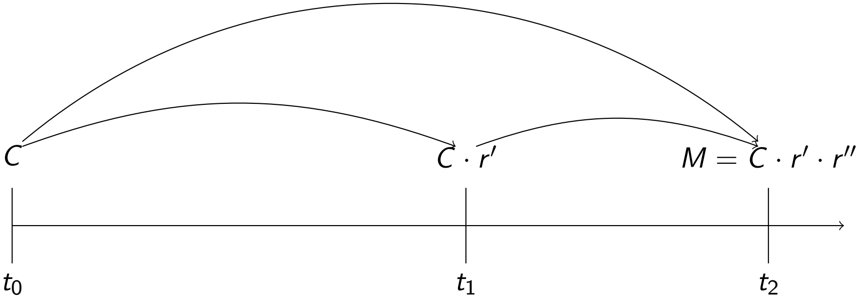
A. Il montante complessivo può essere definito come

$$M = C \cdot r^{'} \cdot r^{''} \tag{94}$$

dove $r^{'}$ e $r^{''}$ sono rispettivamente il fattore di capitalizzazione dei primi $t_1 = 8$ mesi e degli ultimi $t_2 = 4$ mesi. Espicitandoli avremo l'espressione finale del montante a scadenza.

...Esercizio 16

Graficamente



Sia $i_{\frac{1}{6}}$ il tasso mensile applicato nel RIC, il fattore $r^{'}$ risulta essere.

$$r^{'} = \left(1 + \frac{j(6)}{6}\right)^{8} \tag{95}$$

Dalla relazione

$$j(m) = m \cdot i_{\frac{1}{m}} \tag{96}$$

segue che

$$i_{\frac{1}{m}} = \frac{j(m)}{m}. \tag{97}$$

Quindi

$$i_{\frac{1}{6}} = \frac{j(6)}{6} = \frac{0,02}{6} = 0,0033. \tag{98}$$

$j(6)$ è il tasso nominale d'interesse su base semestrale convertibile mensilmente.

...Esercizio 16

Risulta:

$$r^{'} = \left(1 + \frac{j(6)}{6}\right)^{8} = (1 + 0,0033)^{8} = 1,027 \qquad (99)$$

Il secondo fattore di capitalizzazione, $r^{''}$, richiede la determinazione del tasso d'interesse effettivo quadrimestrale equivalente a quello nominale di cui abbiamo conoscenza. Pertanto

$$i_{quadrim} = (1 + 0,0033)^4 - 1 = 0,0134. \tag{100}$$

Risulta

$$r^{''} = (1 + i_{quadrim}) = 1,0134. \tag{101}$$

Dunque, la formula finale del montante è:

$$M = 3000 \cdot r^{'} \cdot r^{''} = 3000 \cdot (1 + 0,0033)^{8} \cdot 1,0134 = 3122,23 \qquad (102)$$

Il tasso di rendimento complessivo dell'operazione finanziaria è:

$$i = \frac{I}{C} = \frac{M - C}{C} = \frac{3122,23 - 3000}{3000} = 0,041 \qquad (103)$$

B. Poichè dal tasso nominale $j(6)$ possiamo ricavare quello effettvio mensile $i_{\frac{1}{6}}$, sfruttiamo questa informazione e le relazioni fondamentali per definire il tasso di sconto effettivo corrispondente che sarà, quindi, su base mensile. Si ha:

$$d_{\frac{1}{6}} = \frac{i_{\frac{1}{6}}}{1 + i_{\frac{1}{6}}} = \frac{0,0033}{1,0033} = 0,003322 \qquad (104)$$

Esercizio 17

Il sig. Rossi investe 1500 euro secondo la seguente forza d'interesse su base annuale:

$$\delta(t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2t} \tag{105}$$

Ipotizzando che la durata dell'investimento sia pari a 3 anni e 2 mesi, determinare

1. Il montante a scadenza;
2. La forza di sconto;

Svolgimento

1. Il montante a scadenza è così definito:

$$M(t) = 1500 \cdot r(t) = 1500 \cdot \exp\left(\int_0^t \frac{1}{10} + \frac{1}{2u} du\right) \tag{106}$$

Risolviamo l'integrale definito sull'intervallo $[0, t]$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{10} + \frac{1}{2u} du &= \int_0^t \frac{1}{10} du + \int_0^t \frac{1}{2u} du = \\
&= \frac{1}{10} \int_0^t du + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{u} du = \\
&= \frac{1}{10} \left[u\right]_0^t + \frac{1}{2} \left[log(u)\right]_0^t = \\
&= \frac{t}{10} + \frac{1}{2} log(t)
\end{aligned} \tag{107}$$

Sostituendo il risultato dell'equazione (107) nell'equazione (106) e considerando che il tempo dell'investimento è $t = 3 + \frac{1}{6}$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
M(t) = 1500 \cdot r(t) &= 1500 \cdot \exp\left(\int_0^{3+\frac{1}{6}} \frac{1}{10} + \frac{1}{2u} du \right) = \\
&= 1500 \cdot \exp\left(\frac{3 + \frac{1}{6}}{10} + \frac{1}{2} log \left(3 + \frac{1}{6} \right) \right) = \\
&= 3663,69
\end{aligned}
\tag{108}
$$

...Esercizio 17

1. Dalla teoria sappiamo che $\delta(t) = \rho(t)$, motivo per cui la forza di sconto è automaticamente determinata.
   Infatti

Noto d, risulta

$$i = \frac{d}{1-d} \tag{109}$$

Analiticamente:

$$\delta = \log(1+i) = \log\left(1 + \frac{d}{1-d}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{1}{1-d}\right) = log(1) - log(1-d) = -\log(1-d).$$

Poiché, dalla teoria, risulta che $\rho = -\log(1-d)$, si ottiene:

$$\delta = \rho. \tag{110}$$

Esercizio 18

Si vuole valutare oggi un credito esigibile tra 5 mesi e pari a 18000 euro. A tal fine, si ipotizza l'utilizzo di una forza di sconto su base semestrale pari a $\rho = 2\%$. Si proceda a:

1) Determinare il valore attuale secondo la forza di sconto posta;
2) Il tasso di interesse effettivo equivalente alla forza di sconto considerata;
3) Verificare se la legge di capitalizzazione sia scindibile.

Svolgimento

1) Il valore attuale sarà così definito:

$$\begin{aligned}
C(t) &= 18000 \cdot \exp\left(-\int_0^t 0,02\, du\right) = \\
&= 18000 \cdot \exp\left(-0,02 \int_0^t du\right) = \\
&= 18000 \cdot \exp\left(-0,02 \cdot t\right) = \\
&= 18000 \cdot \exp\left(-0,02 \cdot \frac{5}{6}\right) = \\
&= 17702,49
\end{aligned}$$

2) Il tasso effettivo d'interesse semestrale sarà ottenibile sfruttando le relazioni fondamentali, ovvero

$$
\begin{aligned}
i(t) = r(t) - 1 = \frac{1}{v(t)} - 1 = \\
= \frac{1}{\exp(-0,02)} - 1 = \\
= \exp(0,02) - 1 = 0,0202
\end{aligned}
$$

3) La legge di capitalizzazione $r(t) = e^{\rho t}$ è scindibile se presi due istanti $k, h < t$ risulta che

$$r(t) = r(k+h) = r(k) \cdot r(h)$$

sostituendo l'espressione della legge di capitalizzazione si ha che

$$r(k) \cdot r(h) = e^{\rho k} \cdot e^{\rho h} = e^{\rho k + \rho h} = e^{\rho(k+h)} = r(k+h)$$

Pertanto, la legge di capitalizzazione risulta scindibile.

Osservazione

Tale risultato è ottenibile anche utilizzando il Teorema di Cantelli e osservando che la forza di sconto risulta costante nel tempo, motivo per cui l'associata legge di capitalizzazione è scindibile.

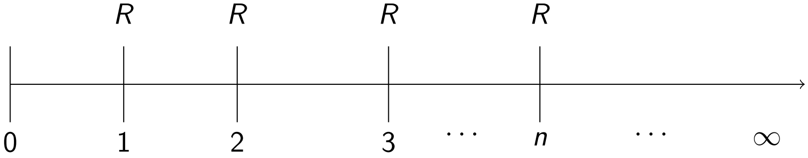
Esercizio 19

Si consideri una rendita perpetua di rata $R = 500$. Si determini il suo valore in $t = 0$ in base alle seguenti leggi esponenziali:

1. tasso annuo di interesse $i = 10,00\%$. La rata viene pagata annualmente;
2. tasso trimestrale $i_{\frac{1}{4}}$ (equivalente a quello indicato al punto precedente). La rata viene pagata trimestralmente.
   Si considerino sia il caso di pagamento posticipato che anticipato della rata.

Svolgimento.

Consideriamo il caso di pagamento posticipato della rata.



Consideriamo pe semplicità il flusso $\underline{x} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ relativa ad una operazione di rendita immediata, posticipata, temporanea n periodi e di rata costante R (cioè $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$) secondo lo scadenziario $\underline{t} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Il suo valore in t_0 sarà allora:

$$V(\underline{t}, \underline{x}) = R \cdot v(t_0, t_1); + R \cdot v(t_0, t_2) + \cdots + R \cdot v(t_0, t_n). \tag{111}$$

Se il tasso periodale i è costante e vale, come specificato una legge eponenziale e poniamo per semplicità $t_0 = 0$, allora

$$v(t_0, t_k) = (1+i)^{-(t_k - t_0)} = v(t_0, t_k) = (1+i)^{-t_k}. \tag{112}$$

Se poi, per comodità, si indica $v = (1+i)^{-1}$, allora

$$v(0, t_k) = (1+i)^{-(t_k)} = v^{t_k}. \tag{113}$$

Con queste considerazioni, dalla (111), osservando che $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$, si ha

$$V(\underline{t}, \underline{x}) = R \cdot v \cdot (1 + v + v^2 + v^3 \cdots + \cdots + v^{n-1}). \tag{114}$$

Condiseriamo, nella (114) l'espressione in parentesi

$$1 + v + v^2 + v^3 \cdots + \cdots + v^{n-1}. \tag{115}$$

Essendo, come noto, $0 < v \leq 1$, allora la (115) è una progressione geometrica di ragione v per la quale, vale, dalla teoria

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^k = 1 + v + v^2 + v^3 \cdots + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v}. \tag{116}$$

La (114) diventa

$$V(\underline{t}, \underline{x}) = R \cdot v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}. \tag{117}$$

...Esercizio 19

Nella (117), esplicitando $v = (1+i)^{-1}$ (dove i è il generico tasso riferito al periodo considerato), si ha

$$V(\underline{t}, \underline{x}) = R \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}}. \tag{118}$$

Con ovvi passaggi

$$V(\underline{t}, \underline{x}) = R \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{1+i}}, \tag{119}$$

da cui

$$= R \cdot \frac{1+i}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \tag{120}$$

Come noto $a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Quindi

$$V(\underline{t}, \underline{x}) = R \cdot a_{\overline{n}|i}. \tag{121}$$

In presenza di pagamento flusso infinito di rate come nel caso iniziale si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i} = a_{\overline{\infty}|i}. \tag{122}$$

Il prezzo Vdel flusso infinito di rendite, nel caso di pagamento posticipato, si calcola con la seguente epressione

$$V = \frac{R}{i}. \tag{123}$$

Osservazione

Per il montante si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^{n}-1}{i} = \lim_{n\to\infty} s_{\overline{n}|i} = \infty. \tag{124}$$

Con in dati numerici del primo quesito si ha, considerando una rendita pagata annualmente,

$$V = R \cdot a_{\overline{\infty}|0,1} = 500 \cdot \frac{1}{0,1} = 5000. \tag{125}$$

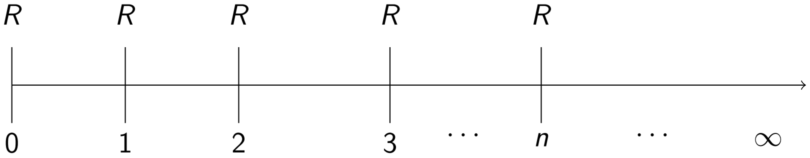
In preenza invece di periodi di durata trimestrale, occorre, prima di tutto determinare il tasso trimestrale equivalente. Si ha

$$(1+i_{\frac{1}{4}})^4 = 1+i \qquad \rightarrow i_{\frac{1}{4}} = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0,1)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0241. \tag{126}$$

Il prezzo, secondo il nuovo schema periodale, sarà

$$V = R \cdot a_{\overline{\infty}|0,1} = 500 \cdot \frac{1}{0,02411} = 20738,28. \tag{127}$$

Consideriamo il caso di pagamento anticipato della rata.



Consideriamo pe semplicità il flusso $\underline{x} = \{R_0, R_1, \ldots, R_n\}$ relativa ad una operazione di rendita immediata, posticipata, anticipata n periodi e di rata costante R (cioè $R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1} = R$) secondo lo scadenziario $\underline{t} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\}$. Il suo valore in $t_0 = 0$ sarà allora:

$$V(\underline{t}, \underline{x}) = R + R \cdot v + R \cdot v^2 + \cdots + R \cdot v^{n-1} = R \cdot (1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}). \quad (128)$$

...Esercizio 19

Nella (128) si riconosce, limitatamente alla serie geometrica in parentesi, che

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^k = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v}. \tag{129}$$

Esplictando $v = 1 + i$, nella (129), segue con ovvi passaggi

$$\frac{1+i}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}}. = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}. \tag{130}$$

Per una rendita perpetua, anticipata, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1+i}{i}. \tag{131}$$

Con i dati del problema si ha

1. nel caso annuo

$$V = R \cdot \frac{1+i}{i} = 500 \cdot \frac{1+0,1}{0,1} = 5500 \tag{132}$$

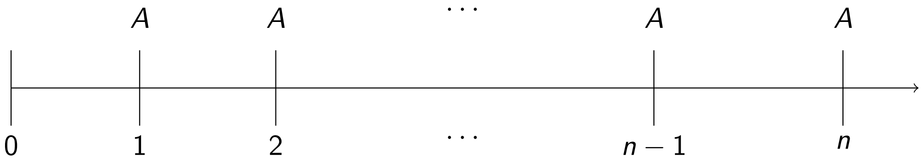
2. nel caso trimestrale

$$V = R \cdot \frac{1+i_{\frac{1}{4}}}{i_{\frac{1}{4}}} = 500 \cdot \frac{1+0,02411}{0,02411} = 21238,28. \tag{133}$$

Esercizio 20

Si determini il numero minimo di annualità con cui si può rimborsare, applicando un tasso annuo del 10% un debito di 20000 euro se si è in grado di pagare un importo non maggiore di euro 2100 alla fine di ogni anno. Determinare il valore finale rata R.

Indicata con A la somma massima diposta ad esborsare annualmente per pagare, al più, una rata di importo non superiore a 2100 euro, il problema, su di un diagramma importi-epoche, si formalizza al seguente modo



Si tratta, quindi, di un probmela di remdita immediata, posticimata, temporanea n anni. L'incognita del problema è proprio n ovvero il numero delle rate.

...Esercizio 20

Secondo lo schema che precede, indicando il debito, all'epovca 0, con D, si ha

$$D = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{134}$$

Per calcolare il numero di rate, secondo le condizioni poste, occorre risolvere l'equazione (134) nell'incognita n. Dalla (135) segue

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{D}{A} \tag{135}$$

$$1-(1+i)^{-n} = i \cdot \frac{D}{A} \tag{136}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - i \cdot \frac{D}{A} \tag{137}$$

$$-n \cdot \log(1+i) = \log(1 - i \cdot \frac{D}{A}) \tag{138}$$

In conclusione

$$n = -\frac{\log(1 - i \cdot \frac{D}{A})}{\log(1+i)}. \tag{139}$$

Con in dati del problema

$$n = -\frac{\log(1 - 0,1 \cdot \frac{20000}{2100})}{\log(1+0,1)} = 31,94. \tag{140}$$

Arrotondiamo n all'intero più vicino, cioè poniamo $n = 32$. L'importo della rata R si calcola sostituendo nell'equazione che segue $n = 32$ e sostituendo A con R e risolvendo, in quest'ultima incognita:

$$D = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \tag{141}$$

$$D = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{142}$$

Dalla (142), segue facilmente

$$R = \frac{D}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}. \tag{143}$$

Con i dati del problema Dalla (142), segue facilmente

$$R = \frac{20000}{\frac{1-(1+0{,}1)^{-32}}{0.1}} = 2099,43. \tag{144}$$

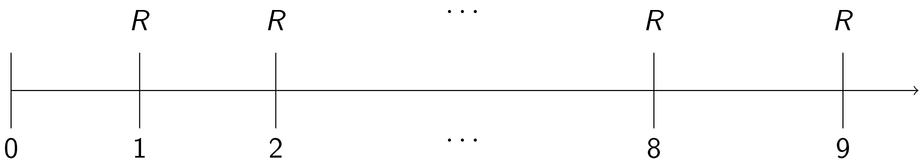
Il vincolo dell'mporto massimo della rata annua esborsabile è quindi soddisfatto.

Esercizio 21

Viene proposto un piano d'accumulo di 9 rate annuali dell'importo, ciascuna di euro 3000. Il piano prevede, a scadenza, il pagamento, al beneficiario, di una somma pari ad euro 39392,08. Sapendo che dalla data di stipula del contratto, la prima rata viene pagata dopo 1 anno, si stimi il tasso annuale applicato. Si ipotizzi di operare nel RIC.

...Esercizio 21

Svolgimento. Il contrtto prevede il versmaneto delle rate secondo il seuguente schema



Per la stima del tasso i applicato (l'incognita del problema), occorre risolvere per via numerica la seguente equazione, non esistendo, per questa, soluzioni in forma chiusa

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{145}$$

La somma $S = 39392,08$ sarà disponibile alla scadenza del contratto, ovvero dopo il versamento dell'ultima rata in $t = 9$. Si ha

$$s_{\overline{9}|i} = \frac{(1+i)^9 - 1}{i} = \frac{S}{R} = \frac{39392,08}{3000} = 13,130693. \tag{146}$$

Consideriamo la funzione

$$s_{\overline{9}|i} = \frac{(1+i)^9 - 1}{i}. \tag{147}$$

Allora

i	$s_{\overline{9}\rceil i}$
$0,085$	$12,75124361$
$0,09$	$13,02103644$
$0,095$	$13,29706910$
$0,10$	$13,57947691$
$0,105$	$13,86839773$

E' evidente, dalla tabella, che il tasso cercato è compreso ta il 9,00% e il 9,50%.

Esercizio 22

Tizio contrae un debito di 10000 euro da restituire in 30 rate mensili posticipate ad un tasso del 10% annuo. L'istituto di credito concede che la prima rata venga pagata a partire dalla fine del dodicesimo mese successivo alla stipula del contratto. All'inizio del trentaseiesimo mese le condizioni di mercato diventano più favorevoli essendo il nuovo tasso di finanziamento pari al 7% annuo. Tizio valuta la possibilità di pagare, al massimo, un importo mensile pari al doppio della rata precedente pagata. La nuova forma di restituzione viene approvata dall'istituto finanziario applicando, però, una penale di 200 euro Si determini:

1. l'importo della rata R;
2. il numero minimo di rate che Tizio dovrà pagre dopo che le condizioni di mercato sono mutate. Determinare l'importo della nuova rata R'.

...Esercizio 22

Svolgimento.
Indichiamo con i_A ed i_B rispettivamente i tassi mensile applicati inizialmente e al cambiamento delle condizioni contrattuali. Segue, nel primo caso

$$(1+i_A)^{12} = (1+0,1) \quad \Rightarrow i_A = (1+0,1)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00797414, \tag{148}$$

mentre, nel secondo caso

$$(1+i_B)^{12} = (1+0,07) \quad \Rightarrow i_B = (1+0,07)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,005654145. \tag{149}$$

Osservazione

All'inizio del dodicesimo mese Tizio restituirà il prestito pagando 30 rate mensili posticipate.

Indicato con D_{12} Il valore del prestito all'inizio del docicesimo mese, si ha

$$D_{12} = R \cdot a_{\overline{30|}i_A} = \frac{1-(1+i_A)^{-30}}{i_A}. \tag{150}$$

Indicato, inoltre, con D_0 il debito inizialmente finanziato, è ovvio che

$$D_0 = D_{12} \cdot (1+i_A)^{-12}. \tag{151}$$

Quindi

$$D_0 = R \cdot a_{\overline{30|}i_A} \cdot (1+i_A)^{-12} = R \cdot \frac{1-(1+i_A)^{-30}}{i_A} \cdot (1+i_A)^{-12}. \tag{152}$$

Dall'equazione precedente, segue, facilmente

$$R = \frac{D_0}{\frac{1-(1+i_A)^{-30}}{i_A} \cdot (1+i_A)^{-12}} = \frac{10000}{\frac{1-(1+i_A)^{-30}}{i_A} \cdot (1+i_A)^{-12}} = 413,72. \tag{153}$$

All'inizio del trentaseiesimo mese, si avrà, noto R dalla precedente equazione, il debito residuo

$$D_{36} = R \cdot a_{\overline{6}|i_A} = R \cdot \frac{1-(1+i_A)^{-6}}{i_A} = 2414,51. \tag{154}$$

Il nuovo debito, D_{36}, verrà rimborsato al nuovo tasso i_B, versando rate mensili di importo $2 \cdot R$, dove R è l'importo della precedente rata.

Ora, il numero minimo di rate del nuovo contratto di finanziamento che prevede il rimborso di D_{36} al tasso i_B in n rate di importo massimo $2 \cdot R$. Si ha, tenendo conto della penale

$$D_{36} + 200 = 2 \cdot R \cdot a_{\overline{n}|i_B} = R \cdot \frac{1 - (1 + i_B)^{-n}}{i_B}. \tag{155}$$

Con semplici calcoli

$$n = -\frac{\log\left(1 - i_B \cdot \left(\frac{D_{36}+200}{2 \cdot R}\right)\right)}{\log(1 + i_B)} = 3,19 \approx 4. \tag{156}$$

L'imprto della rata R' è quindi

$$R' = \frac{D_{36} + 200}{\frac{1-(1+i_B)^{-4}}{i_B}} = 662,89. \qquad (157)$$

Essendo $662,89 = R' < 2 \cdot R$, il vincolo imposto è stato rispettato.

Cosa accade se invece si sceglie si arrotonda a $n = 3$? La rata $R' = 881,37$. Il vincolo non è rispettato.

Esercizio 23

Sia data la seguente operazione finanziaria

$$\underline{x}/\underline{t} = \{-100, 30, 30, 20, 25\}/\{0, 1, 2, 3, 4\}. \tag{158}$$

Verificare se esiste il Tasso Interno di Rendimento e, in caso affermativo, calcolare il suo valore approssimato.

Svolgimento

Per verificare l'esistenza del T.I.R. positivo occorre verificare se siano o meno soddisfatte le condizioni del Teorema di Norstrøm che qui, per comodità, si riporta

Theorem (Norstrøm)

Sia data la seguente operazione finanziaria

$$\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}} = \{-x_0, x_1, \ldots x_n\} \,/\, \{t_0, t_1, \ldots t_n\}\,. \tag{159}$$

Sotto le seguenti condizioni:

a) $x_k > 0$, *per* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > x_0$,

allora, l'operazione finanziaria (159) *possiede TIR positivo.*

Quindi, in relazione all'operazione finanziaria in questione

a) la condizione a) del teorema è veriifcata essendo $x_k > 0$, per $k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

b) anche la condizioen b) del teorema è verificata esendo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 + 30 + 20 + 25 = 105 > x_0 = 100.$$

Si indichi con i^* il TIR e si ponga $v = (1 + i^*)^{-1}$. La ricerca del TIR si riduce alla determinazione dell'unico zero positivo della funzione

$$F(v) = 25 \cdot v^4 + 20 \cdot v^3 + 30 \cdot v^2 + 30 \cdot v - 100 = 0. \tag{160}$$

Risolviamo la (160) per via numerica. Applichiamo, al riguardo il Teorema degli zeri nell'intervallo $(0, 1)$.

Ad una verifica preliminare, dalla tabella che segue il fattore di sconto cercato appartiene all'intervallo $(0,95, 0,99)$

v	F(v)
0,6	-63,64
0,7	-51,4375
0,8	-36,32
0,9	-17,7175
0,95	-6,9148438
0,99	2,52388025

Poiché, il TIR è tale da rendere nulla l'equazione del REA, procediamo per interpolazionelineare. Indichiamo per comodità $v_1 = 0,95$ e $v_2 = 0,99$. Consideriamo il seguente schema

v	F(v)
v_1	$F(v_1)$
v^*	$F(v^*)$
v_2	$F(v_2)$

Nella tabella che precede sono noti tutti i valori ad eccezione di v^* che sarà stimato per interpolazione lineare (ovvio che $F(v^*) = 0$). Segue

$$\frac{v^* - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{F(v^*) - F(v_1)}{F(v_2) - F(v_1)} \tag{161}$$

Dalla (161)

$$v^* = \frac{F(v^*) - F(v_1)}{F(v_2) - F(v_1)}(v_2 - v_1) + v_1. \tag{162}$$

Quest'ultima, essendo $F(v^*) = 0$, diventa.

$$v^* = \frac{0 - F(v_1)}{F(v_2) - F(v_1)}(v_2 - v_1) + v_1. \tag{163}$$

Sostituendo i dati numerici, si ha che $v^* = 0,979304146$. Segue

$$v^* = \frac{1}{(1 + i^*)} \Rightarrow i^* = \frac{1}{v^*} - 1 = 0,021133224. \tag{164}$$

Esercizio 24

Si completi il seguente piano di ammortamento a quota capitale costante.

t	C_k	I_k	R_k	D_k
0				
1				
2				
3	10750			
4				
5				
6				
7			12577,5	
8				

E' facile determinare il debito iniziale finanziato. Infatti, essendo $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C$, nel caso considerato, si ha

$$D_0 = C \cdot n = 10750 \cdot 8 = 86000. \tag{165}$$

Dalle relazione

$$D_k = D_{k-1} - C, \tag{166}$$

si ottiene, facilmente, il debito residuo. Ad esempio

$$D_1 = D_0 - C = 86000 - 10750 = 75250, \tag{167}$$

e così via.

Residua il calcolo del tasso d'interesse applicato. E' noto che

$$R_k = C_k + I_k. \tag{168}$$

Essendo $C_7 = C = 10750$, allora

$$I_7 = R_7 - C = 12577,5 - 10750 = 1827,5. \tag{169}$$

Dopo aver pagato 6 rate, residua un debito pari ad euro

$$D_0 - C \cdot 6 = 86000 - 10750 \cdot 6 = 21500. \tag{170}$$

Il tasso applicato sarà quindi pari a

$$i = \frac{I_7}{D_6} = \frac{1827,5}{21500} = 0,085. \tag{171}$$

Con tutti i dati a disposizione si redige il piano d'ammortamento completo.

t	C_k	I_k	R_k	D_k
0				86000
1	10750	7310	18060	75250
2	10750	6396,25	17146,25	64500
3	10750	5482,5	16232,5	53750
4	10750	4568,75	15318,75	43000
5	10750	3655	14405	32250
6	10750	2741,25	13491,25	21500
7	10750	1827,5	12577,5	10750
8	10750	913,75	11663,75	0

Esercizio 25

Si conderi un contratto che prevede il finanziamento di un debito D che viene rimborsato pagando rate annuali. La prima rata, pagata alla fine del primo periodo, è pari a 100 e le successive sono variabili in progressione geometrica secondo un tasso annuo pari al 5%. Il contratto ha una durata di 10 anni. Dato un tasso d'interesse effettivo annuale del 5%. Calcolae il valore del debito finanziato.

Svolgimento.
Detto i il tasso d'interesse effettivo annuale e j il tasso (annuo) di progressione, e posto $q = (1+j)$ e $v = (1+i)^{-1}$, l'applicazone del seguente risultato per il calcolo del debito D

$$D = R \cdot v \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n}{1 - \left(\frac{1+j}{1+i}\right)}, \tag{172}$$

come evidente, porta, essendo $i = j$, a dover gestire una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.
Con il passaggio limite e l'utilizzo della regola di De L'Hôpital si ottiene:

$$R \cdot v \lim_{q \cdot v \to 1} \frac{-n.\overbrace{(q \cdot v)^{n-1}}^{\to 1}}{-1} = R \cdot v \cdot n.$$

...Esercizio 25

Quindi

$$D = R \cdot v \cdot n = 100 \cdot 1,05^{-1} \cdot 10 = 952,38.$$