Il criterio del TIR

Theorem (Cartesio)

Sia dato un polinomio $p_m(x)$ di grado m. Sia N il numero delle variazioni nella successione dei segni dei suoi coefficienti e sia h il numero delle radici positive di $p_m(x) = 0$. Allora $N - h$ è un numero pari positivo o nullo.

Theorem (Norstrøm)

Sia data la seguente operazione finanziaria

$$\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}} = \{-x_0, x_1, \ldots x_n\} \,/\, \{t_0, t_1, \ldots t_n\} \,. \tag{1}$$

Sotto le seguenti condizioni:

a) $x_k > 0$, *per* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > x_0$,

allora, l'operazione finanziaria (1) *possiede TIR positivo.*

Il criterio del TIR

Dimostrazione.

Sotto le ipotesi fornite, consideriamo l'equazione del *TIR* associata all'operazione finanziaria (1):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v^k = x_0. \tag{2}$$

Consideriamo, per il momento, la sola funzione polinomiale nella variabile v che compare al primo membro della (2), ovvero

$$f(v) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v^k. \tag{3}$$

$\square$

Il criterio del TIR

Dimostrazione.

È immediato verificare che, per $v > 0$, la funzione: è continua, strettamente crescente e convessa. Infatti:

- la continuità è di immediata verifica;
- $f^{'}(v) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot x_k \cdot v^{k-1}$, è positiva sotto la condizione a);
- $f^{''}(v) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \cdot x_k \cdot v^{k-2}$, è positiva sotto la condizione a).

Se confrontiamo, quindi, il grafico della funzione (3) con quello della funzione $g = x_0$ ($x_0 > 0$) costante (il cui grafico è una retta parallela all'asse delle ascisse), emerge dalla monotonia e dalla convessità della funzione polinomiale considerata che i grafici delle due funzioni si intersecano in un sol punto, nel primo quadrante (si veda Figura successiva). Ciò implica l'esistenza di un *TIR* positivo, unico per il Teorema di Cartesio. Se si pone $v = 1$, allora la $f(1) > g$, il che garantisce che sia $v^* < 1$.

□

Il criterio del TIR

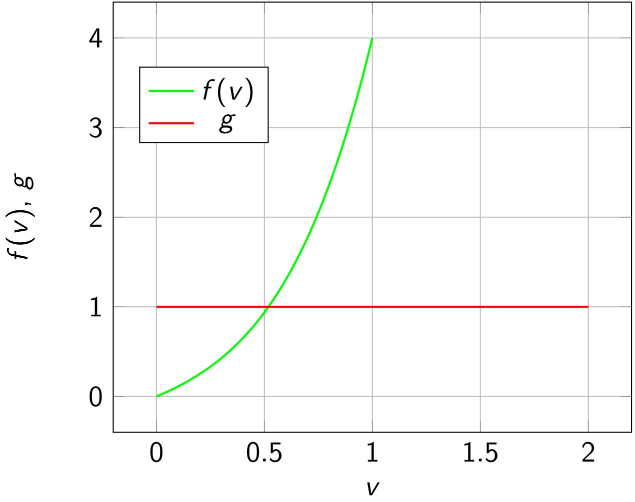

Figura: La rappresentazione grafica del Teorema di Norstrøm.

Exercise 1. Scelta tra operazioni finanziarie

Si considerino le seguenti due operazioni finanziarie d'investimento:

$$\boldsymbol{x}_A/\boldsymbol{t}_A = \{-100, 30, 30, 20, 25\} \,/\, \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$\boldsymbol{x}_B/\boldsymbol{t}_B = \{-100, 50, 50, 5, 5\} \,/\, \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Considerando l'epoca $T = 0$ come riferimento della valutazione, determinare quale delle due operazioni risulti essere la più conveniente sia secondo il criterio del VAN, utilizzando un tasso d'interesse per periodo unitario dell'1%, che secondo il criterio del TIR.

Soluzione

• **Criterio del VAN.** Ricordiamo che il Valore Attuale Netto (VAN, detto anche Risultato Economico Attualizzato, REA), a un certo tasso di valutazione i, altro non è che il valore attuale di tutti gli importi futuri rispetto a una certa data di valutazione T, ovvero:

$$VAN(T, i) = \sum_{k=T+1}^{n-T} x_k \cdot (1+i)^{T-k}$$

Nel caso di operazioni d'investimento, come nel nostro esercizio, il VAN deve essere calcolato in riferimento ad entrambe le operazioni e i due risultati ottenuti possono essere utilizzati per effettuare una scelta mediante il loro confronto: se $VAN_A > VAN_B$ allora preferiremo l'operazione A invece che B, altrimenti accadrà il viceversa, oppure $VAN_A = VAN_B$ e quindi siamo indifferenti se scegliere l'operazione A o la B.
Pertanto i due VAN sono:

$$VAN_A(0, 0.01) = -100 + 30 \cdot a_{\overline{2}|0.01} + 20 \cdot 1.01^{-3} + 25 \cdot 1.01^{-4} = 2.55$$
$$VAN_B(0, 0.01) = -100 + 50 \cdot a_{\overline{2}|0.01} + 5 \cdot a_{\overline{2}|0.01} \cdot 1.01^{-2} = 8.18$$

Essendo $VAN_B > VAN_A$ secondo il criterio del VAN siamo portati a preferire l'operazione d'investimento B rispetto all'operazione d'investimento A.

• **Criterio del TIR.** Ricordiamo che il TIR è quel tasso d'interesse che rende nullo il VAN, ovvero

$$TIR \ : \ VAN(T,TIR) = \sum_{k=T+1}^{n-T} x_k \cdot (1+TIR)^{T-k} = 0 \tag{1}$$

Il TIR può essere utilizzato come criterio di scelta tra operazioni finanzarie. Nel caso di operazioni finanziarie d'investimento, come nel nostro esercizio, avremo che se $TIR_A > TIR_B$ preferiremo A a B, altrimenti accadrà il viceversa, mentre se $TIR_A = TIR_B$ allora saremo indifferenti nello scegliere A oppure B. Ovviamente nel caso di operazioni finanziarie di finanziamento, il ragiomento è completamente speculare.

Spesso l'equazione del VAN risulta essere un polinomio di grado superiore al terzo, motivo per cui non esistono forme chiuse per trovarne la soluzione, ovvero il valore del TIR tale che sia verificata l'equazione (1). Pertanto, a tal fine si adottano delle tecniche di Analisi Numerica, ovvero quella "branca" della matematica applicata devota allo sviluppo di algoritmi idonei ad approssimare numericamente un problema matematico o una sua soluzione, che nel nostro caso sarà il valore del TIR, se esiste ed è unico.
Il metodo che utilizziamo è molto semplice ed è detto delle *approssimazioni successive*; nel proseguo lo applicheremo percorrendone parte teorica e parte numerica per risolvere il nostro esercizio.

Iniziamo col considerare l'operazione A e trovarne il relativo TIR. Per cui, ponendo $(1+TIR_A)^{-1} = v_A$, avremo che:

$$\begin{aligned} TIR_A \ : \ VAN_A(0,TIR_A) &= \sum_{k=0}^{4} x_k \cdot (1+TIR_A)^{-k} = 0 \\ \sum_{k=0}^{4} x_k \cdot v_A^k &= \underbrace{-100 + 30 \cdot v_A + 30 \cdot v_A^2 + 20 \cdot v_A^3 + 25 \cdot v_A^4}_{=\varphi(v_A)} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Vogliamo trovare quel valore di $v_A^\star$ tali che $\varphi(v_A^\star) = 0$, da cui ne deriverà grazie alle relazioni fondamentali, che il nostro TIR_A sarà ottenuto come $i^\star = \frac{1-v^\star}{v^\star}$.

E' facile veriicare che le ncondizoni del teorema di Norstrøm sono verificate

Procediamo all'applicazione del metodo delle approssimazione successive. Esso si basa sull'iterazione di passi ben precisi:

A. Scegliamo due valori $a, b \in [0,1]$ con $a < b$, in modo tale che $\varphi(a) < \varphi(b)$

B. Calcoliamo il punto medio $c = \frac{a+b}{2}$ e calcoliamo $\varphi(c)$

C. Verifichiamo che sia soddisfatta la condizione del TIR. In particolare:

- se $\varphi(c) = 0$ allora abbiamo la soluzione $v_A^\star = c$
- se $\varphi(c) > 0$ allora la soluzione va ricercata nell'intervallo (a, c) ripartendo dal punto B.
- se $\varphi(c) < 0$ allora la soluzione va ricercata nell'intervallo (c, b) ripartendo dal punto B.

Numericamente abbiamo:

- selezioniamo l'intervallo $(a = 0, b = 1)$ e calcoliamo il punto medio $c = 0.5$. La nostra funzione $\varphi(c = 0.5)$ è

$$\varphi(0.5) = -100 + 30 \cdot 0.5 + 30 \cdot 0.5^2 + 50 \cdot 0.5^3 + 25 \cdot 0.5^4 = -73.44 < 0 \quad (3)$$

  Essendo $\varphi(0.5) < 0$ allora la soluzione $v_A^\star$ si trova in $(0.5; 1)$.

- nell'intervallo $(0.5; 1)$ il punto medio è $c = 0.75$. La nostra funzione $\varphi(c = 0.75)$ è

$$\varphi(0.75) = -100 + 30 \cdot 0.75 + 30 \cdot 0.75^2 + 50 \cdot 0.75^3 + 25 \cdot 0.75^4 = -44.28 < 0 \quad (4)$$

  Essendo $\varphi(0.75) < 0$ allora la soluzione $v_A^\star$ si trova in $(0.75; 1)$.

- nell'intervallo $(0.75; 1)$ il punto medio è $c = 0.875$. La nostra funzione $\varphi(c = 0.875)$ è

$$\varphi(0.875) = -100 + 30 \cdot 0.875 + 30 \cdot 0.875^2 + 50 \cdot 0.875^3 + 25 \cdot 0.875^4 = -22.73 < 0 \quad (5)$$

  Essendo $\varphi(0.875) < 0$ allora la soluzione $v_A^\star$ si trova in $(0.875; 1)$.

- nell'intervallo $(0.875; 1)$ il punto medio è $c = 0.9375$. La nostra funzione $\varphi(c = 0.9375)$ è

$$\varphi(0.9375) = -100 + 30 \cdot 0.9375 + 30 \cdot 0.9375^2 + 50 \cdot 0.9375^3 + 25 \cdot 0.9375^4 = -9.71 < 0 \quad (6)$$

  Essendo $\varphi(0.9375) < 0$ allora la soluzione $v_A^\star$ si trova in $(0.9375; 1)$.

- nell'intervallo $(0.9375; 1)$ il punto medio è $c = 0.96875$. La nostra funzione $\varphi(c = 0.96875)$ è

$$\varphi(0.96875) = -100 + 30 \cdot 0.96875 + 30 \cdot 0.96875^2 + 50 \cdot 0.96875^3 + 25 \cdot 0.96875^4 = -2.58 < 0 \quad (7)$$

  Essendo $\varphi(0.96875) < 0$ allora la soluzione $v_A^\star$ si trova in $(0.96875; 1)$.

- e così via iterativamente fino ad arrivare all'intervallo $(0.96875; 0.984375)$ per il quale $\varphi(c = 0.9765625) = -0.729$ e ci fermiamo accettando un errore (elevato) nell'ordine di 10^{-1}. Pertanto, avremo che $v_A^\star = 0.9765625$ da cui si ricava che $TIR_A = \frac{1-0.9765625}{0.9765625} = 0.024$

Passando all'operazione finanziaria B, procediamo i medesimi ragionamenti e passi di calcolo fatti per determinare il TIR dell'operazione A, ovvero:

$$\begin{aligned} TIR_B \ : \ VAN_B(0, TIR_B) &= \sum_{k=0}^{4} x_k \cdot (1 + TIR_B)^{-k} = 0 \\ \sum_{k=0}^{4} x_k \cdot v_B^k &= \underbrace{-100 + 50 \cdot v_B + 50 \cdot v_B^2 + 5 \cdot v_B^3 + 5 \cdot v_B^4}_{=\varphi(v_B)} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Utilizzando il metodo delle approssimazioni successive, accettando un errore di approssimazione nell'ordine di 10^{-1}, abbiamo che $v_B^\star \in (0.9375; 0.953125)$, da cui $\varphi(c = 0.9453125) = 0.16$.
Pertanto avremo che $TIR_B = \frac{1-0.9453125}{0.9453125} = 0.058$.

Possiamo quindi concludere che $TIR_B = 5.8\% > TIR_A = 2.4\%$ motivo per cui, per il criterio del TIR, preferiamo l'operazione d'investimento B a quella d'investimento A.