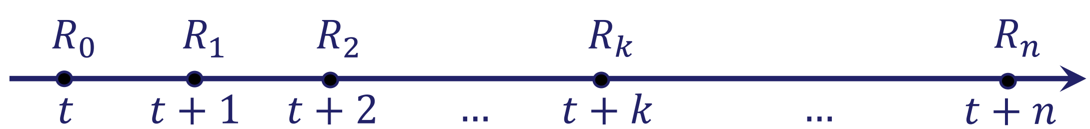
Indici temporali e di variabilità

Obiettivo

Ci prefiggiamo di riassumere in indici sintetici le caratteristiche fondamentali, in particolare la struttura delle scadenze e degli importi, delle operazioni finanziarie complesse in modo da consentire di confrontare tra loro operazioni differenti.

Tali indici risultano generalmente utili nella valutazione delle operazioni finanziarie se, oltre a sintetizzare durata ed importi, riescono a fornire informazioni circa la distribuzione degli importi nel tempo.

Come ormai consueto, ci riferiremo allo scadenzario



L'intervallo $[t,\ t+n]$ prende il nome di **orizzonte temporale del contratto** mentre, fissata l'epoca intermedia $t+k$, la differenza $(t+n)-(t+k)=n-k$ prende il nome di **vita a scadenza** o **vita residua del contratto**.
L'epoca di scadenza $t+n$ è detta **maturity**.

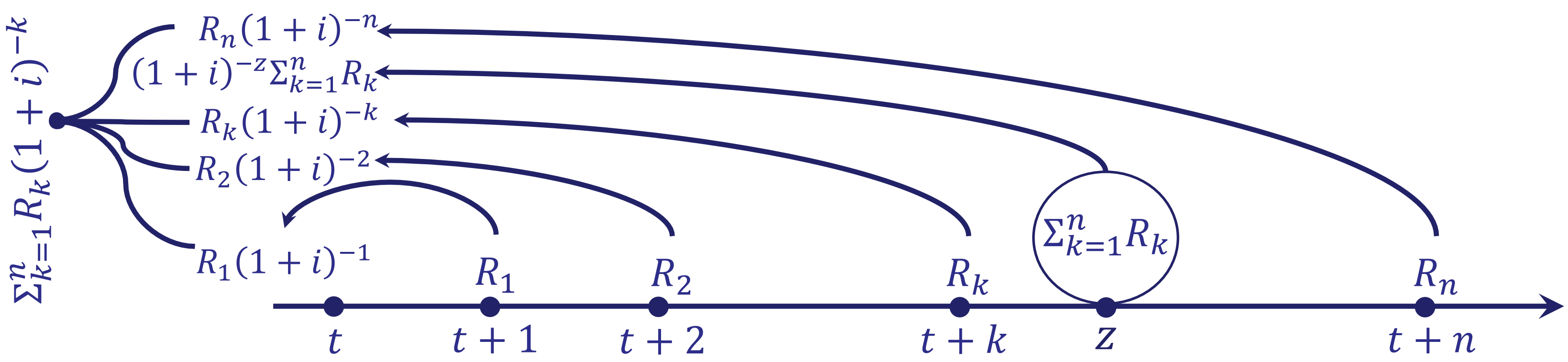
Il primo indice che analizziamo è la **scadenza media finanziaria**, definito come

$$z = \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} R_k - \ln \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k}}{\ln(1+i)} \tag{174}$$

La (174) è dedotta dall'uguaglianza

$$(1+i)^{-z} \sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k} \tag{175}$$

che consente di interpretare finanziariamente l'indicatore: ***z* è l'epoca nella quale**, in ipotesi di capitalizzazione composta con struttura piatta del tasso, **devono essere concentrati tutti gli importi scambiati nell'operazione affinché il valore attuale in *t* sia uguale a quello generato dal flusso degli importi**, ciascuno opportunamente attualizzato.



Osservazioni

La scadenza media finanziaria presenta due svantaggi:

- può essere calcolata solo in ipotesi di struttura piatta dei tassi
- è un indice finanziariamente scorretto: contiene la somma degli importi $R_1, \dots, R_n$ che maturano in epoche diverse e che non vengono riportati finanziariamente alla stessa epoca prima di essere sommati.

Il secondo indice è la **scadenza media aritmetica** (**average term to maturity**).

Esso è definito come la media aritmetica, ponderata con le rate R_k, delle epoche in cui hanno luogo i pagamenti, cioè:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\big((t+k)-t\big)R_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} kR_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k} = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{R_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k} \tag{176}$$

Osservazione

- Si può dimostrare che, se le rate R_k non sono tutte uguali tra loro, si ha $\bar{t} > z$.
- Anche la scadenza media aritmetica, come la scadenza media finanziaria, è un indicatore **finanziariamente scorretto** in quanto somma importi che maturano in epoche diverse.

Esempio 41

Si calcolino la scadenza media finanziaria e la scadenza media aritmetica per le seguenti obbligazioni, di valore nominale pari a 100.

	Obbligazione A	Obbligazione B
Durata	5 anni	5 anni
Cedola	Annuale	Annuale
Tasso di interesse	4% (effettivo annuo)	4% (effettivo annuo)
Rimborso	A scadenza, al valore nominale	**Graduale** pari al 20% del valore nominale ad ogni scadenza annuale

Scadenzario Obbligazione A

-100	4	4	4	4	104
t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$

Scadenzario Obbligazione B

-100	$20+4$	$20+3{,}2$	$20+2{,}4$	$20+1{,}6$	$20+0{,}8$
t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$

(**Si osservi che ovviamente ad ogni scadenza l'interesse viene calcolato sul capitale sottoscritto e non ancora rimborsato**)

Esempio 41 (segue)

Piano dei calcoli

Obbligazione A

t	R_k	$R_k(1+i)^{-k}$	kR_k
1	4	3,846154	4
2	4	3,698225	8
3	4	3,555985	12
4	4	3,419217	16
5	104	85,48042	520
Σ	120	100	560

Obbligazione B

t	R_k	$R_k(1+i)^{-k}$	kR_k
1	24,0	23,076923	24,0
2	23,2	21,449704	46,4
3	22,4	19,913518	67,2
4	21,6	18,463771	86,4
5	20,8	17,096084	104
Σ	112	100	328

Essendo

$$z = \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} R_k - \ln \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{-k}}{\ln(1+i)} \quad \text{e} \quad \bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} kR_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$$

segue

$$z_A = \frac{\ln 120 - \ln 100}{\ln 1{,}04} \simeq 4{,}648604 \quad \text{e} \quad \bar{t}_A = \frac{560}{120} = 4,\bar{6}$$

$$z_B = \frac{\ln 112 - \ln 100}{\ln 1{,}04} \simeq 2{,}889511 \quad \text{e} \quad \bar{t}_B = \frac{328}{112} \simeq 2{,}928571$$

Il terzo indice è la **durata media finanziaria** (duration), introdotta

"… *to signify the essence of the time element in a loan*"

F. Macaulay, 1938 (Hicks, 1939)

Come la scadenza media aritmetica, la duration è **una media aritmetica delle epoche di pagamento degli importi ponderata con gli importi R_k attualizzati.**

Se si impiegano i fattori $v(t, t+k)$ dedotti dalla struttura a pronti per scadenza vigente all'epoca t, si ha

$$D_t = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t+k)R_k v(t,t+k)}{\sum_{k=1}^{n} R_k v(t,t+k)} \tag{177}$$

Osservazione

La (177) tiene conto dei valori degli importi attualizzati e esprime un'epoca D che, per $R_k \geq 0$ per $k = 1,2, \dots, n$, risulta compresa tra $t+1$ e $t+n$.

La (177) è scritta utilizzando i prezzi a pronti $v(t, t+k)$. La formula diventa

$$D_t = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t+k)R_k\big(1+i_k(t,t+k)\big)^{-1}}{\sum_{k=1}^{n}R_k\big(1+i_k(t,t+k)\big)^{-1}}, \quad \text{se si utilizza il tasso periodale} \tag{178}$$

$$D_t = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t+k)R_k\Pi_{s=1}^{k}\big(1+i(t+s-1,t+s)\big)^{-1}}{\sum_{k=1}^{n}R_k\Pi_{s=1}^{k}\big(1+i(t+s-1,t+s)\big)^{-1}}, \quad \text{se si utilizza il tasso a pronti per periodo unitario} \tag{179}$$

$$D_t = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t+k)R_k\Pi_{s=1}^{k}\big(1+i(t,t+s-1,t+s)\big)^{-1}}{\sum_{k=1}^{n}R_k\Pi_{s=1}^{k}\big(1+i(t,t+s-1,t+s)\big)^{-1}}, \quad \text{se si utilizza il tasso a termine per periodo unitario} \tag{180}$$

Evidentemente, se la struttura per scadenza è piatta la formula si semplifica e, denotato con i il tasso effettivo di interesse per periodo unitario, la duration è data da

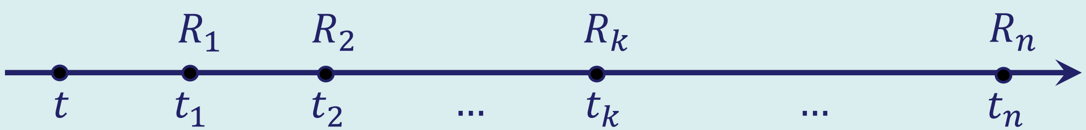
$$D_t = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t+k)R_k(1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{-k}} \tag{181}$$

La (181) prende il nome di **flat yield curve duration**.

Osservazioni

1. La (181) è formalmente la stessa se la successione dei tassi a pronti (a termine) è rimpiazzata dal tasso medio per periodo unitario $\bar{\imath}$.
   Benché produca risultati diversi da quelli che si ottengono utilizzando la successione dei tassi a pronti (a termine), è molto frequente il calcolo della duration in modo approssimato attraverso la (181), nella quale **il tasso di valutazione i è il tasso interno di rendimento** del cash-flow.

2. Le definizioni (177)-(181) della duration sono relative al caso di un cash flow periodico. Più in generale potrebbe aversi un cash flow non periodico del tipo



   In questo caso, l'espressione della duration (nel caso, per esempio, di struttura piatta dei tassi) diventa ovviamente

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - t)R_k(1+i)^{-(t_k-t)}}{\sum_{k=1}^{n}R_k(1+i)^{-(t_k-t)}}$$

   Immediato è modificare di conseguenza anche le (177)-(180).

Osservazioni (segue)

3. Solitamente la duration di un cash flow periodico è scritta come

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} k R_k (1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k}},$$

notazione che sottintende il fatto che il tempo decorra dall'epoca t.
Ovviamente vale la relazione

$$D_t = t + D$$

Infatti

$$D_t = t + \frac{\sum_{k=1}^{n} k R_k (1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} t R_k (1+i)^{-k} + \sum_{k=1}^{n} k R_k (1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k}}$$

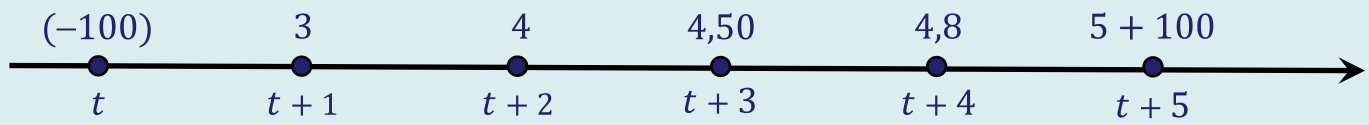
$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} (t+k) R_k (1+i)^{t-(t+k)}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{t-(t+k)}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} (t+k) R_k (1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k}}$$

Esempio 42

Si calcoli in $t = 0$ la durata media finanziaria di un'obbligazione emessa alla pari alla stessa epoca, di valore nominale uguale a $100€$, che viene estinta al valore nominale e paga cedole annuali in base ai tassi di interesse di mercato

$$i(0,1) = 3\% \qquad i(1,2) = 4\% \qquad i(2,3) = 4{,}5\% \qquad i(3,4) = 4{,}8\% \qquad i(4,5) = 5\%.$$



t	i		v_k	$R_k v_k$	$kR_k v_k$		
0		-100					
1	0,030	3,0	0,970874	2,9126	2,9126		
2	0,040	4,0	0,933532	3,7341	7,4683		
3	0,045	4,5	0,893333	4,0200	12,0600		
4	0,048	4,8	0,852417	4,0916	16,3664		
5	0,050	105,0	0,811825	85,2417	426,2083	Anni	**4**
			Totale	**100,0000**	**465,0155**	Mesi	**7**
				Rapporto	**4,650155**	Giorni	**24**

Esempio 42 (segue)

Si calcoli ora in $t = 0$ la durata media finanziaria (duration) della stessa obbligazione ma attualizzando gli importi al tasso medio dedotto dalla struttura a pronti data.

Calcoliamo il tasso medio

$$\bar{\imath} = \big((1+0{,}03)(1+0{,}04)(1+0{,}045)(1+0{,}048)(1+0{,}05)\big)^{1/5} - 1 \simeq 0{,}042575$$

t	i			v_k	$R_k v_k$	$kR_k v_k$		
0			-100					
1	0,030		3,0	0,959163	2,87749	2,87749		
2	0,040		4,0	0,919994	3,67998	7,35996		
3	0,045	0,042575	4,5	0,882424	3,97091	11,91273		
4	0,048		4,8	0,846389	4,06267	16,25067		
5	0,050		105,0	0,811825	85,24165	426,20826	Anni	**4**
				Totale	**99,83270**	**464,60911**	Mesi	**7**
					Rapporto	**4,653877**	Giorni	**25**

Osservazione

Si noti che D_t ($= D$ poiché $t = 0$) in questo caso è $4{,}653877$, valore più grande di $4{,}650155$.

Esempio 42 (segue)

Si calcoli ora in $t = 0$ la durata media finanziaria della stessa obbligazione ma considerando che ad ogni scadenza oltre alla cedola (calcolata ai tassi di mercato) viene rimborsato un quinto del valore nominale.

t	i		v_k	$R_k v_k$	$k R_k v_k$		
0		-100					
1	0,030	23,00	0,970874	22,33010	22,33010		
2	0,040	23,20	0,933532	21,65795	43,31591		
3	0,045	22,70	0,893333	20,27865	60,83594		
4	0,048	21,92	0,852417	18,68497	74,73988		
5	0,050	21,00	0,811825	17,04833	85,24165	Anni	**2**
			Totale	**100,00000**	**286,46348**	Mesi	**10**
				Rapporto	**2,864635**	Giorni	**11**

Osservazione

Si noti che $D_t = D$ in questo caso è $2{,}864635$, valore molto più contenuto dei precedenti. Ciò avviene perché le «masse» finanziarie sono distribuite lungo tutto lo scadenzario anziché essere concentrate nell'ultima scadenza, come nell'esempio precedente.

1. $\boldsymbol{D = n}$ **se e solo se il rimborso avviene in un'unica soluzione e non ci sono cedole** (zero coupon bond). Infatti in questo caso è

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} k R_k v(t, t+k)}{\sum_{k=1}^{n} R_k v(t, t+k)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 0 \cdot v(t, t+k) + n R_n v(t, t+n)}{\sum_{k=1}^{n-1} 0 \cdot v(t, t+k) + R_n v(t, t+n)}$$

$$= \frac{n R_n v(t, t+n)}{R_n v(t, t+n)} = n$$

2. Sia $D = \tau$. La duration **decresce al crescere di ciascuno degli importi $\boldsymbol{R_k}$ con $\boldsymbol{k < \tau}$ e cresce al crescere di ciascuno degli importi $\boldsymbol{R_k}$ con $\boldsymbol{k > \tau}$**, tendendo alla maturity n al crescere di R_n rispetto alle R_k, con $k < n$ (**titoli a bassa cedola**, anche detti **deep discount bond**)

3. La duration **decresce al crescere del tasso di calcolo**. Considerando per esempio la flat yield curve duration e assumendo la derivabilità rispetto al tasso i, si ha

$$\frac{\partial D}{\partial i} = -v\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 R_k v^k}{\sum_{k=1}^{n} R_k v^k} - \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k R_k v^k}{\sum_{k=1}^{n} R_k v^k}\right)^2\right).$$

La quantità tra parentesi è del tipo $M(X^2) - M^2(X)$, quindi formalmente ha l'espressione della varianza σ^2 e pertanto è

$$\frac{\partial D}{\partial i} = -v\sigma^2 < 0.$$

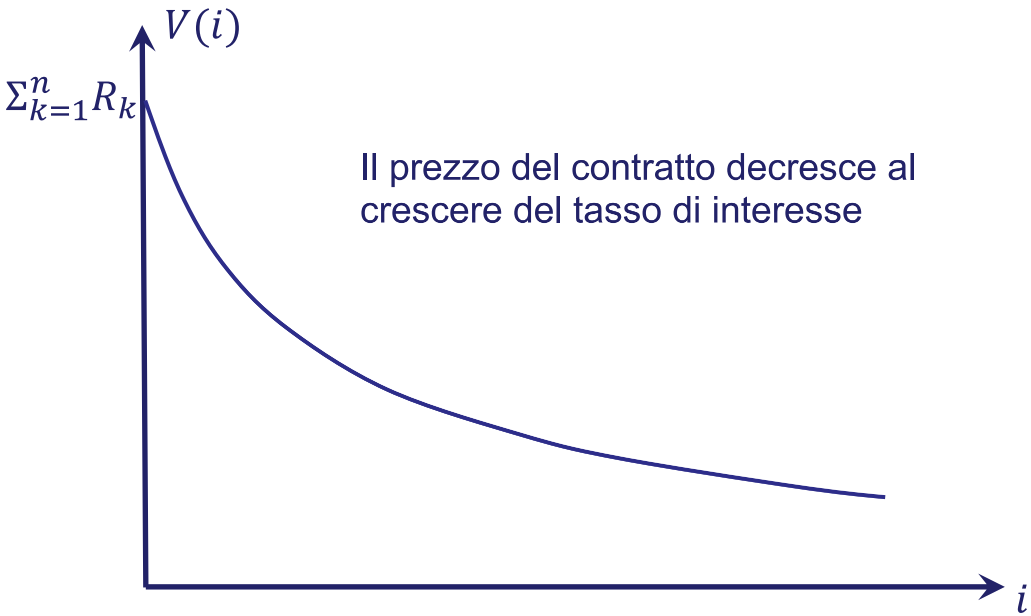
Dalla negatività della derivata prima segue la decrescenza della duration rispetto al tasso di calcolo.

4. La duration **misura la sensitività del valore attuale del contratto rispetto alle variazioni del tasso i**.
Per dimostrarlo, si consideri – in ipotesi di struttura piatta dei tassi – il valore attuale (=prezzo di non arbitraggio) del flusso degli importi R_k

$$V(i) = R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + \cdots + R_n(1+i)^{-n}$$

La funzione $V(i)$ può essere rappresentata, osservando quanto segue:

- $V(i) > 0$ per $i > 0$
- $V(0) = \Sigma_{k=1}^{n} R_k$
- $\frac{dV(i)}{di} = \Sigma_{k=1}^{n} -kR_k\,(1+i)^{-(k+1)} < 0$
- $\frac{d^2V(i)}{di^2} = \Sigma_{k=1}^{n} k(k+1)R_k(1+i)^{-(k+2)} > 0$



Il prezzo del contratto decresce al crescere del tasso di interesse

Analizziamo la derivata prima del prezzo del contratto

$$\frac{dV(i)}{di} = \Sigma_{k=1}^{n}(-k)R_k(1+i)^{-(k+1)} = -(1+i)^{-1}\Sigma_{k=1}^{n} kR_k(1+i)^{-k}. \tag{182}$$

Poiché la flat yield curve duration può scriversi come

$$\Sigma_{k=1}^{n} kR_k(1+i)^{-k} = D\Sigma_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{-k}. \tag{183}$$

Sostituendo il secondo membro della (183) nella (182) segue

$$\frac{dV(i)}{di} = -\frac{D}{1+i}\Sigma_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{-k}$$

ovvero

$$\frac{dV(i)}{di} = -\frac{D}{1+i}V(i) \tag{184}$$

Il rapporto

$$D^{(m)} := \frac{D}{1+i} \tag{185}$$

prende il nome di **duration modificata** o **volatilità** (del prezzo).

Per incrementi non infinitesimi la (184) può scriversi come

$$\frac{V(i+\Delta i)-V(i)}{\Delta i} = -D^{(m)}V(i) + o(\Delta i) \tag{186}$$

ovvero, trascurando l'infinitesimo $o(\Delta i)$,

$$\frac{V(i+\Delta i)-V(i)}{\Delta i} \simeq -D^{(m)}V(i) \tag{187}$$

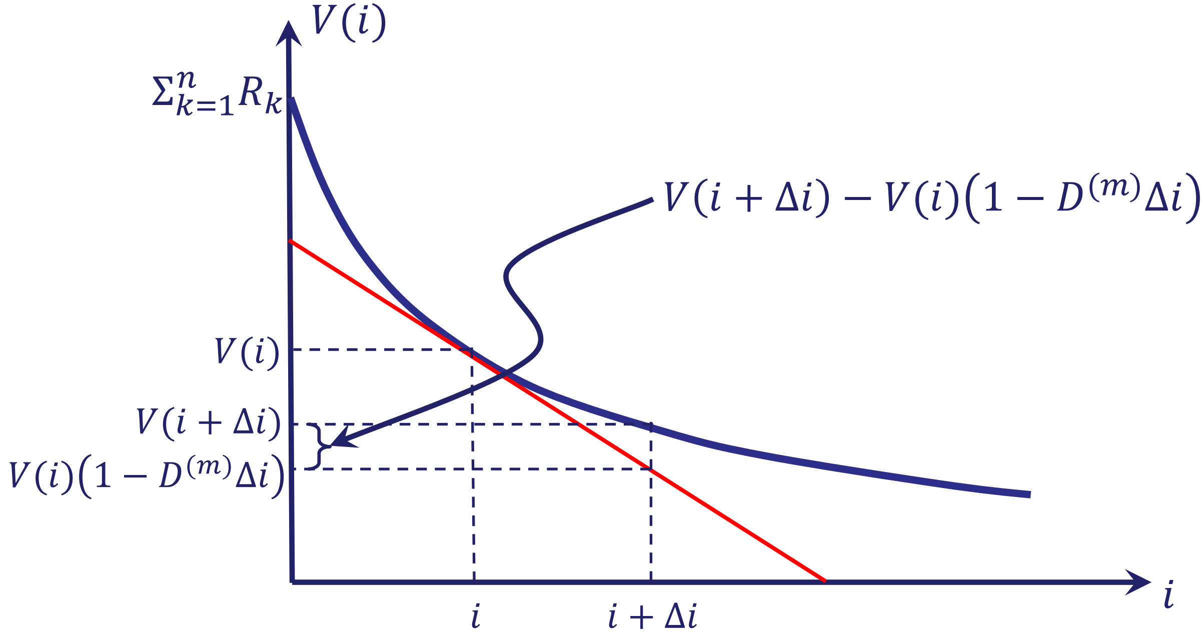
da cui

$$\begin{aligned} V(i+\Delta i) &\simeq V(i) - D^{(m)}V(i)\Delta i \\ &\simeq V(i)\left(1-D^{(m)}\Delta i\right) \end{aligned} \tag{188}$$

La (188):

1. fornisce un'**approssimazione del prezzo** (valore attuale) $V(i+\Delta i)$ del contratto **conseguente una variazione del tasso di interesse** pari a Δi.
   (La stima fornita dalla (188) può essere migliorata aggiungendo un termine di secondo grado che tiene conto della convessità della funzione valore attuale)
2. indica che tanto minore è la duration modificata tanto minore è la variazione del prezzo conseguente una variazione di tasso di interesse. In tal senso, la relazione fornisce **un'indicazione nella scelta delle obbligazioni.**

1. **Stima** del prezzo del contratto conseguente una variazione del tasso di interesse

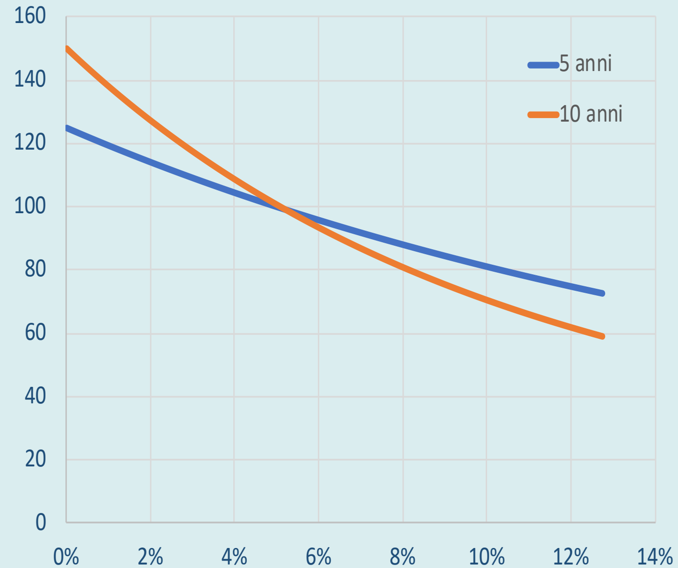


Osservazione

La stima $V(i)(1 - D^{(m)}\Delta i)$ del prezzo del contratto ottenuta attraverso la duration modificata è per difetto. Ciò consegue dal fatto che $V(i)$ è una funzione decrescente e convessa.

Osservazione

A parità di tasso cedolare (i_0) e di variazione del tasso (Δi), i prezzi delle obbligazioni con maturity maggiore ($V^{(L)}$) variano in proporzione di più dei prezzi delle obbligazioni con maturity breve ($V^{(B)}$)



Esempio 43

Si abbia l’operazione finanziaria descritta dal seguente cash-flow:

	100	200	300	400	500	600
0	1	2	3	4	5	6

Il tasso iniziale $i = 8\%$.
La duration e la duration modificata sono, rispettivamente

$$D = 4{,}156892754 \qquad \text{e} \qquad D^{(m)} = 3{,}848974772$$

Il valore attuale del contratto (equivalentemente, il prezzo di non arbitraggio) è

$$V(0{,}08) = 1.514{,}615345$$

Se il tasso subisce un incremento di un punto percentuale (dall’8% al 9%), qual è il nuovo valore attuale (prezzo di non arbitraggio) del contratto?

Per rispondere, possiamo:

1) Calcolare $V(0{,}09)$ ... ed ottenere $V(0{,}09) = 1.457{,}830$, oppure

2) Calcolare $V(0{,}08 + 0{,}01) \simeq V(0{,}08)(1 - D^{(m)} \cdot 0{,}01)$

$$\simeq 1.514{,}615 \cdot (1 - 3{,}848975 \cdot 0{,}01) = 1.456{,}318$$

valore molto prossimo al valore esatto $1.457{,}830$.

Esempio 45 (segue)
La tabella mostra l'approssimazione che si consegue calcolando attraverso la (188) il prezzo del contratto conseguente una variazione di tasso di interesse

i	$V(i)$	$V(0{,}08)\,(1 - D^{(m)}\Delta i)$	ΔV	$\Delta V\%$
0,0600	1.637,668	1.631,210	6,457902	8,12%
0,0625	1.621,552	1.616,635	4,916816	7,06%
0,0650	1.605,653	1.602,061	3,592335	6,01%
0,0675	1.589,968	1.587,487	2,480909	4,98%
0,0700	1.574,492	1.572,913	1,579054	3,95%
0,0725	1.559,222	1.558,338	0,883356	2,95%
0,0750	1.544,154	1.543,764	0,390462	1,95%
0,0775	1.529,287	1.529,190	0,097086	0,97%
0,0800	1.514,615	1.514,615	0	----
0,0825	1.500,137	1.500,041	0,096041	–0,96%
0,0850	1.485,849	1.485,467	0,382102	–1,90%
0,0875	1.471,748	1.470,892	0,855136	–2,83%
0,0900	1.457,830	1.456,318	1,512153	– 3,75%
0,0925	1.444,094	1.441,744	2,350219	–4,66%
0,0950	1.430,536	1.427,170	3,366452	–5,55%
0,0975	1.417,153	1.412,595	4,558027	–6,43%
0,1000	1.403,943	1.398,021	5,922169	–7,31%

Osservazione
In valori assoluti, la variazione percentuale del prezzo dell'obbligazione è asimmetrica rispetto alle variazioni (positive o negative) del tasso: al decrescere del tasso il prezzo aumenta percentualmente più di quanto non diminuisca al crescere del tasso (nell'esempio precedente, rispetto al valore centrale dell'8%).

Tale effetto è conseguenza della convessità della funzione valore attuale rispetto al tasso di interesse e **suggerisce che l'approssimazione del prezzo dell'obbligazione attraverso la (188) può essere migliorata considerando termini aggiuntivi di grado superiore al primo**.

Richiamo (approssimazione di una funzione mediante il **polinomio di Taylor**)
Data la funzione $f(x)$, derivabile n volte nel punto x_0 ed $n-1$ volte in un intorno di x_0, per x «prossimo» a x_0 sussiste la

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big)$$
$$= \Sigma_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big),$$

essendo $P_n(x) = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ il polinomio di Taylor di grado n e centro in x_0.

Tale risultato può essere utilizzato per migliorare l'approssimazione che si commette attraverso la (188) nel calcolare il prezzo conseguente una variazione del tasso di interesse. Arrestando l'approssimazione al termine di secondo grado si ha

$$\frac{dV}{di} = \Sigma_{k=1}^{n} - kR_k(1+i)^{-(k+1)}$$
$$= -D^{(m)}V(i)$$

e

$$\frac{d^2V}{di^2} = \Sigma_{k=1}^{n} k(k+1)R_k(1+i)^{-(k+2)}$$

Pertanto, ponendo $C = \frac{1}{V(i_0)}\Sigma_{k=1}^{n} k(k+1)R_k(1+i_0)^{-(k+2)}$ l'approssimazione può scriversi come

$$V(i) \simeq V(i_0) - D^{(m)}V(i_0)(i-i_0) + \frac{1}{2}C \cdot V(i_0) \cdot (i-i_0)^2$$

cioè

$$\Delta V(i) \simeq -D^{(m)}V(i_0)\Delta i + \frac{1}{2}C \cdot V(i_0) \cdot (\Delta i)^2 \tag{189}$$

nella quale $\Delta V(i) = V(i) - V(i_0)$ e $\Delta i = i - i_0$.

La quantità C, rapporto tra la derivata seconda del valore attuale ed il valore attuale, prende il nome di **convexity** (del prezzo) e misura la convessità della funzione valore attuale per unità di capitale.

Esempio 43 (segue)
Abbiamo già calcolato

$$V(0{,}08+0{,}01) \simeq V(0{,}08)(1-D^{(m)}\cdot 0{,}01) \simeq 1.514{,}615\cdot(1-3{,}848975\cdot 0{,}01) = 1.456{,}318,$$

a fronte del valore esatto $1.457{,}830$.
Miglioriamo ora tale approssimazione attraverso la convexity. Il piano dei conti è

k	R_k	v^k	$R_k v^k$	$k(k+1)R_k(1+0{,}08)^{-(k+2)}$
1	100	0,92593	92,59259	158,766
2	200	0,85734	171,4678	882,036
3	300	0,79383	238,1497	2.450,100
4	400	0,73503	294,0119	5.041,357
5	500	0,68058	340,2916	8.752,356
6	600	0,63017	378,1018	13.614,780
		Somma	1.514,615	30.899,390

Si ha quindi $C = \frac{30.899{,}390}{1.514{,}615} \simeq 20{,}40082$. Pertanto, la nuova stima del prezzo è

$$V(i_0+\Delta i) \simeq V(i_0)\left(1-D^{(m)}\Delta i+\frac{1}{2}C\cdot(\Delta i)^2\right)$$

$$V(0{,}08+0{,}01) \simeq 1.514{,}615\left(1-3{,}848975\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}30.899{,}390\cdot(0{,}01)^2\right)$$
$$\simeq 1.457{,}863.$$

Esempio 43 (segue)

La Tabella mostra – colonne (5) e (6) – il miglioramento della stima del prezzo usando la convexity

(1) Tasso i	(2) Prezzo effettivo	(3) Approx 1° ordine	(4) Approx 2° ordine	(5) (2)-(3)	(6) (2)-(4)
0,055	1.670,563	1.660,358	1.670,014	10,205	0,549
0,058	1.654,003	1.645,783	1.653,605	8,220	0,398
0,060	1.637,668	1.631,209	1.637,389	6,459	0,279
0,063	1.621,552	1.616,635	1.621,366	4,917	0,186
0,065	1.605,653	1.602,061	1.605,537	3,592	0,116
0,068	1.589,968	1.587,486	1.589,900	2,482	0,068
0,070	1.574,492	1.572,912	1.574,457	1,580	0,035
0,073	1.559,222	1.558,338	1.559,207	0,884	0,015
0,075	1.544,154	1.543,764	1.544,150	0,390	0,004
0,078	1.529,287	1.529,189	1.529,286	0,098	0,001
0,080	1.514,615	1.514,615	1.514,615	0,000	0,000
0,083	1.500,137	1.500,041	1.500,137	0,096	0,000
0,085	1.485,849	1.485,466	1.485,853	0,383	-0,004
0,088	1.471,748	1.470,892	1.471,761	0,856	-0,013
0,090	1.457,830	1.456,318	1.457,863	1,512	-0,033
0,093	1.444,094	1.441,744	1.444,158	2,350	-0,064
0,095	1.430,536	1.427,169	1.430,646	3,367	-0,110
0,098	1.417,153	1.412,595	1.417,327	4,558	-0,174
0,100	1.403,943	1.398,021	1.404,201	5,922	-0,258
0,103	1.390,903	1.383,447	1.391,268	7,456	-0,365
0,105	1.378,030	1.368,872	1.378,528	9,158	-0,498

Osservazione

Come la duration, anche la convexity indica come il prezzo del contratto si modifica rispetto alle variazioni del tasso di interesse: **se il tasso si riduce il prezzo aumenta percentualmente più di quanto non si riduca se il tasso aumenta.**

Tale effetto, desiderabile per l'investitore, è tanto maggiore quanto maggiore è la convexity del titolo.

Pertanto, a parità di altre condizioni, **l'investitore preferirà i titoli che presentano convexity più elevata**.

2. Indicazioni nella scelta delle obbligazioni

Si riconsideri la (188)

$$V(i+\Delta i) \simeq V(i)\big(1 - D^{(m)}\Delta i\big)$$

e si supponga che un **operatore investa in un'obbligazione**.

- Se $\Delta i < 0$ (ribasso del tasso) $\Longrightarrow V(i+\Delta i) > V(i)$, cioè $\Delta V > 0$ e la differenza è tanto maggiore quanto maggiore è la $D^{(m)}$, cioè in ultima analisi la duration (che ne costituisce il numeratore)
- Se $\Delta i > 0$ (rialzo del tasso) $\Longrightarrow V(i+\Delta i) < V(i)$, cioè $\Delta V < 0$ e la differenza è tanto minore quanto minore è la $D^{(m)}$, cioè in ultima analisi la duration (che ne costituisce il numeratore)

Ovviamente, l'investitore ha convenienza che la variazione Δi del tasso accresca (o non eroda troppo) il prezzo del contratto, pertanto

- un operatore con **aspettative ribassiste** circa il futuro andamento dei tassi di interesse preferisce **titoli con duration più elevata**
- un operatore con **aspettative rialziste** circa il futuro andamento dei tassi di interesse preferisce **titoli con duration minore**.

Scelte speculari intervengono se l'operazione è di finanziamento.

Si è finora analizzata la variazione del prezzo del titolo al variare del tasso di interesse, osservando che esiste un legame inverso tra le due grandezze.

Il fatto che il tasso di interesse vari nel tempo espone gli operatori finanziari ad un rischio, il cosiddetto **rischio di tasso**, consistente nell'eventualità di non conseguire i risultati che – in assenza di variazioni del tasso – l'operazione finanziaria avrebbe garantito.

Ci proponiamo pertanto di:

1. **analizzare in dettaglio il rischio di tasso**, scomponendolo in:
   a) **rischio di reimpiego** (o **di reinvestimento**)
   b) **rischio di prezzo** (o **di realizzo**)

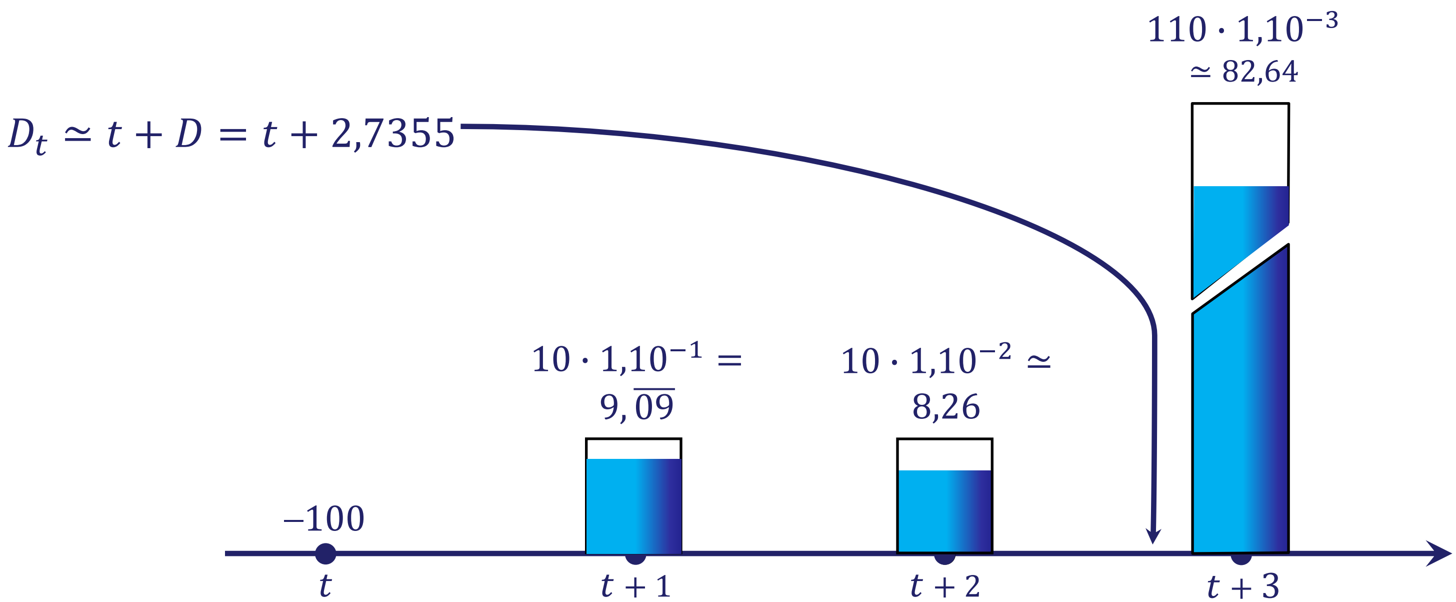
2. comprendere in che modo la **duration svolga un ruolo protettivo** (**di immunizzazione**) rispetto alle variazioni del tasso.

1. Il rischio di tasso

Per comprendere la natura del rischio di tasso, si consideri il seguente flusso finanziario

Sia il tasso sia $i = 10\%$. La duration è

$$D = \frac{1 \cdot 10 \cdot (1+0{,}10)^{-1} + 2 \cdot 10 \cdot (1+0{,}10)^{-2} + 3 \cdot 110 \cdot (1+0{,}10)^{-3}}{100} \simeq 2{,}7355^{(*)}$$



Si supponga che dopo aver riscosso la seconda cedola dell'obbligazione, l'investitore decide di terminare anticipatamente l'operazione.
Quanto vale l'investimento all'epoca $t+2$?

k	R_k	Flussi attualizzati all'epoca $t+2$
$t+1$	10	$10 \cdot 1{,}10 = 11$
$t+2$	10	10
$t+3$	110	$110 \cdot 1{,}10^{-1} = 100$
		$\mathbf{121}$

Valore del cash-flow all'epoca $t+2$ se il tasso sul mercato si è mantenuto al 10%

Problema
Cosa accade se, immediatamente dopo aver acquistato l'obbligazione, il tasso cambia?
Quanto vale all'epoca $t+2$ il flusso in questo caso?

Scenario A. Il tasso passa dal 10% all'8%

k	R_k	Flussi attualizzati all'epoca $t+2$
$t+1$	10	$10 \cdot 1{,}08 = 10{,}80$
$t+2$	10	10
$t+3$	110	$110 \cdot 1{,}08^{-1} = 101{,}85$
Valore del titolo in $t+2$		$\mathbf{122{,}65}$

«Rischio» di prezzo: $101{,}85 > 100$

Rischio di reimpiego: $10{,}80 < 11$

Scenario B. Il tasso passa dal 10% al 12%

k	R_k	Flussi attualizzati all'epoca $t+2$
$t+1$	10	$10 \cdot 1{,}12 = 11{,}20$
$t+2$	10	10
$t+3$	110	$110 \cdot 1{,}12^{-1} = 98{,}21$
Valore del titolo in $t+2$		$\mathbf{119{,}41}$

Rischio di prezzo: $98{,}21 < 100$

«Rischio» di reimpiego: $11{,}20 > 11$

La variazione del tasso

(dal 10% all'8% nello **scenario A**)

(dal 10% al 12% nello **scenario B**)

ha prodotto **effetti opposti**:

positivi nello **scenario A** ($122{,}65 > 121$), e

negativi nello **scenario B** ($119{,}41 < 121$).

L'esempio suggerisce che il **rischio di reimpiego e il rischio di prezzo non si cumulano, ma – almeno parzialmente – si compensano**.

Ciò induce la domanda:
È possibile proteggersi («immunizzarsi») dal rischio di tasso mediante la compensazione delle due componenti?
In altri termini, **esiste un'epoca disinvestendo alla quale si è immunizzati dal rischio di tasso?**

Per rispondere, supponiamo (nell'esempio appena visto) che l'investitore decida di interrompere l'operazione all'epoca coincidente con la duration ($D_t = t + 2{,}7355$).
Qual è il valore del cash-flow a tale epoca?

Scenario base.
Il tasso rimane al 10%

k	R_k	Flussi attualizzati all'epoca $t+2$
$t+1$	10	$10 \cdot 1{,}10^{D_t-(t+1)=D-1} = 11{,}7988$
$t+2$	10	$10 \cdot 1{,}10^{D_t-(t+2)=D-2} = 10{,}7262$
$t+3$	110	$110 \cdot 1{,}10^{D_t-(t+3)=D-3} = 107{,}2620$
Valore del titolo in D_t		$\mathbf{129,7870}$

Scenario A. Il tasso passa dal 10% all'8%

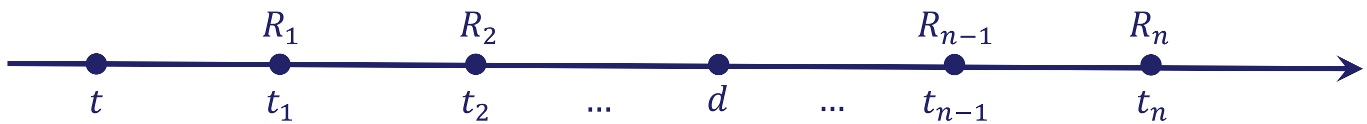
k	R_k	Flussi attualizzati all'epoca $t+2$
$t+1$	10	$10 \cdot 1{,}08^{D_t-(t+1)=D-1} = 11{,}4290$
$t+2$	10	$10 \cdot 1{,}08^{D_t-(t+2)=D-2} = 10{,}5824$
$t+3$	110	$110 \cdot 1{,}08^{D_t-(t+3)=D-3} = 107{,}7838$
Valore del titolo in D_t		$\mathbf{129,7952}$

Scenario B. Il tasso passa dal 10% al 12%

k	R_k	Flussi attualizzati all'epoca $t+2$
$t+1$	10	$10 \cdot 1{,}12^{D_t-(t+1)=D-1} = 12{,}1736$
$t+2$	10	$10 \cdot 1{,}12^{D_t-(t+2)=D-2} = 10{,}8693$
$t+3$	110	$110 \cdot 1{,}12^{D_t-(t+3)=D-3} = 106{,}7521$
Valore del titolo in D_t		$\mathbf{129,7950}$

L'esempio mostra che la duration immunizza dalle variazioni del tasso di interesse.

Il risultato può essere formalizzato, considerando l'operazione finanziaria descritta dal seguente scadenzario



Il valore del contratto all'epoca d – valore che denotiamo con $V(i_0, d)$ per sottolineare la dipendenza sia dal tasso i_0 che dall'epoca di valutazione d – è dato dalla

$$V(i_0, d) = \Sigma_{k=1}^{n} R_k (1 + i_0)^{d - t_k}$$

Si osservi che $d - t_k > 0$ se $d > t_k$ (capitalizzazione) e $d - t_k < 0$ se $d < t_k$ (attualizzazione).

Ci proponiamo di stabilire se, comunque dati i due tassi i_0 e i, esista un'epoca d tale che

$$V(i, d) \geq V(i_0, d) \qquad (190)$$

tale cioè che il valore del contratto in d, calcolato al tasso i, risulti non inferiore al valore del contratto in d, calcolato sulla base del tasso i_0.

La (190) richiede che la funzione V abbia un minimo relativo in i_0. Ricordando che vale il

Teorema
Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte nel punto x_0, interno al dominio D. Se:

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) > 0 \ \ [f''(x_0) < 0]$

allora x_0 è un punto di minimo [massimo] locale per la funzione f.

e assumendo che la funzione V sia derivabile due volte rispetto al tasso di interesse, occorre verificare che sia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial i} V(i_0, d) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial i^2} V(i_0, d) > 0 \end{cases}$$

Affinché il punto i_0 sia di minimo relativo per V.

Calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{\partial}{\partial i}V(i,d)=\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i)^{d-t_k-1}$$

e risolviamo la

$$\frac{\partial}{\partial i}V(i_0,d)=\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i_0)^{d-t_k-1}=0.$$

$$=\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i_0)^{-t_k}(1+i_0)^{d-1}=0$$

$$=(1+i_0)^{d-1}\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i_0)^{-t_k}=0$$

Poiché il fattore $(1+i_0)^{d-1}$ è maggiore di zero quali che siano $i_0>0$ e d, la derivata prima è nulla se e solo se $\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i_0)^{-t_k}=0$

cioè se

$$\Sigma_{k=1}^{n}(dR_k(1+i_0)^{-t_k}-t_kR_k(1+i_0)^{-t_k})=0$$

da cui

$$d\Sigma_{k=1}^{n}R_k(1+i_0)^{-t_k}-\Sigma_{k=1}^{n}t_kR_k(1+i_0)^{-t_k}=0$$

e infine

$$d=\frac{\Sigma_{k=1}^{n}t_kR_k(1+i_0)^{-t_k}}{\Sigma_{k=1}^{n}R_k(1+i_0)^{-t_k}}. \qquad (191)$$

Si osservi che la (191) altro non è che la duration.

Calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial i^2}V(i,d) &= \Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)(d-t_k-1)R_k(1+i)^{d-t_k-2} \\ &= \Sigma_{k=1}^{n}\left((d-t_k)^2R_k(1+i)^{d-t_k-2}-(d-t_k)R_k(1+i)^{d-t_k-2}\right) \\ &= \Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)^2R_k(1+i)^{d-t_k-2}-\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i)^{d-t_k-2} \\ &= \Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)^2R_k(1+i)^{d-t_k-2}-(1+i)^{-1}\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i)^{d-t_k-1}\end{aligned}$$

Abbiamo appena mostrato che $\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)R_k(1+i_0)^{d-t_k-1}=0$ quando d è la duration, per cui

$$\frac{\partial^2}{\partial i^2}V(i_0,d)=\Sigma_{k=1}^{n}(d-t_k)^2R_k(1+i_0)^{d-t_k-2}>0. \tag{192}$$

Sono pertanto soddisfatte le condizioni del primo e del secondo ordine per il minimo, quindi:

La durata d per la quale la funzione V ha un minimo rispetto al tasso di interesse coincide con la duration.

Esempio 44

Si acquista in $t = 0$ un'obbligazione alla pari con le seguenti caratteristiche:
Valore nominale: $100€$
Durata: 8 anni
Cedola annuale al tasso $i = 6\%$;
Rimborso del valore nominale: $50€$ al $4°$ ed $50€$ all'$8°$ anno
La valutazione è al tasso del 6%.
La duration del titolo è calcolata attraverso il seguente piano dei conti

k	R_k	$R_k v^k$	$kR_k v^k$
0	-100		
1	6	$5{,}66038$	$5{,}6604$
2	6	$5{,}33998$	$10{,}6790$
3	6	$5{,}03772$	$15{,}1132$
4	56	$44{,}35725$	$177{,}4290$
5	3	$2{,}24178$	$11{,}2089$
6	3	$2{,}11488$	$12{,}6893$
7	3	$1{,}99517$	$13{,}9662$
8	53	$33{,}25286$	$266{,}0228$
		$100{,}00000$	$512{,}7697$
		Duration	$\mathbf{5.127697}$

Esempio 44 (segue)

Calcoliamo il valore dell'obbligazione all'epoca coincidente con la duration ($d = 5.127697$) al variare del tasso di interesse.

$$V(i, 5{,}127697) = \Sigma_{k=1}^{8} R_k (1+i)^{5{,}127697-k}$$
$$= 6(1+i)^{5{,}12\ldots-1} + 6(1+i)^{5{,}12\ldots-2} + 6(1+i)^{5{,}12\ldots-3} + 56(1+i)^{5{,}12\ldots-4}$$
$$+3(1+i)^{5{,}12\ldots-5} + 3(1+i)^{5{,}12\ldots-6} + 3(1+i)^{5{,}12\ldots-7} + 53(1+i)^{5{,}12\ldots-8}$$

Si è finora esplorato il ruolo protettivo svolto dalla duration in relazione ad un titolo obbligazionario.

Poiché:

1. la duration indica l'epoca alla quale l'investimento risulta immunizzato;
2. l'epoca in corrispondenza della quale si desidera che l'investimento sia immunizzato è generalmente determinata dagli impegni e/o dagli obiettivi dell'investitore;
3. non è detto che il mercato offra titoli con duration esattamente uguale a quella desiderata da ciascun investitore che vuole immunizzarsi

è rilevante chiedersi se sia possibile immunizzarsi per un'epoca qualsiasi e non soltanto per quelle corrispondenti alle duration dei titoli offerti sul mercato.

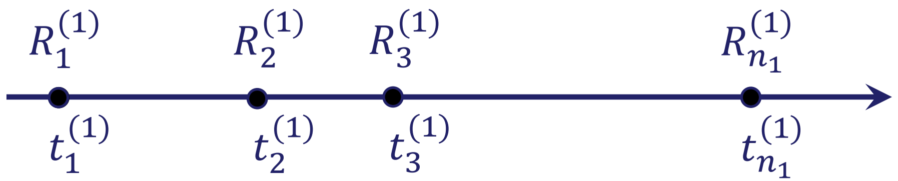
La risposta è affermativa sotto una condizione molto debole: è possibile immunizzarsi per l'epoca D qualsiasi se il mercato offre titoli con duration D_1 e D_2 tali che (*)

$$D_1 < D < D_2$$

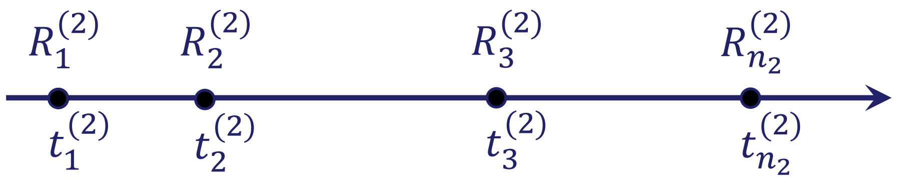
(*) Si sono considerate disuguaglianze forti perché, in caso di uguaglianza, il problema sarebbe risolto acquistando il titolo tra i due la cui duration coincide con $\boldsymbol{D}$.

Dimostriamo il risultato, considerando i due titoli $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$, caratterizzati come segue:

$$T^{(1)} = \left\{\left(R_1^{(1)}, t_1^{(1)}\right), \left(R_2^{(1)}, t_2^{(1)}\right), \dots, \left(R_{n_1}^{(1)}, t_{n_1}^{(1)}\right)\right\}$$



$$T^{(2)} = \left\{\left(R_1^{(2)}, t_1^{(2)}\right), \left(R_2^{(2)}, t_2^{(2)}\right), \dots, \left(R_{n_2}^{(2)}, t_{n_2}^{(2)}\right)\right\}$$



Indicando con $V^{(1)}$ e $V^{(2)}$ i valori attuali dei due titoli, le relative duration sono

$$D^{(1)} = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} t_k^{(1)} R_k^{(1)} v\left(t, t_k^{(1)}\right)}{V^{(1)}} \qquad D^{(2)} = \frac{\sum_{k=1}^{n_2} t_k^{(2)} R_k^{(2)} v\left(t, t_k^{(2)}\right)}{V^{(2)}}$$

Consideriamo ora un portafoglio composto dai due titoli. Gli importi e le epoche del portafoglio sono date dall'unione degli importi e delle epoche che caratterizzano ciascuno dei due titoli, cioè – denotando con Π il portafoglio – si ha

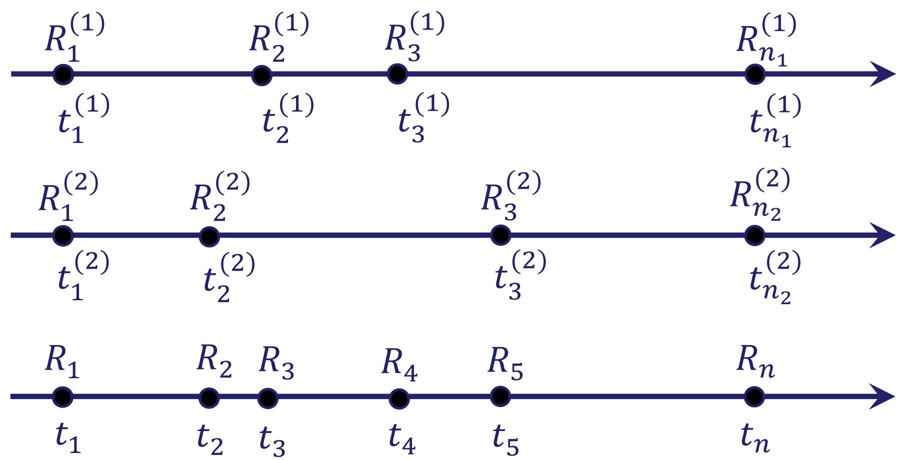
(*) Si sono considerate disuguaglianze forti perché, in caso di uguaglianza, il problema sarebbe risolto acquistando il titolo tra i due la cui duration coincide con $\boldsymbol{D}$.

Indici temporali e di variabilità
Duration del portafoglio

$$\Pi = T^{(1)} \cup T^{(2)} = \left\{ \left(R_1\ , t_1\ \right), \left(R_2\ , t_2\ \right), \dots, \left(R_n\ , t_n\ \right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(R_1^{(1)}, t_1^{(1)}\right), \left(R_2^{(1)}, t_2^{(1)}\right), \dots, \left(R_{n_1}^{(1)}, t_{n_1}^{(1)}\right), \left(R_1^{(2)}, t_1^{(2)}\right), \left(R_2^{(2)}, t_2^{(2)}\right), \dots, \left(R_{n_2}^{(2)}, t_{n_2}^{(2)}\right) \right\}$$

cioè, sullo scadenzario



essendo

$$R_1\ = R_1^{(1)} + R_1^{(2)};\quad R_2\ = R_2^{(2)};\quad R_3\ = R_2^{(1)};\quad R_4\ = R_3^{(1)};\quad R_5\ = R_3^{(2)}; \dots;\quad R_n\ = R_{n_1}^{(1)} + R_{n_2}^{(2)}$$

$$t_1\ = t_1^{(1)} = t_1^{(2)};\quad t_2\ = t_2^{(2)};\quad t_3\ = t_2^{(1)};\quad t_4\ = t_3^{(1)};\quad t_5\ = t_3^{(2)}; \dots;\quad t_n\ = t_{n_1}^{(1)} = t_{n_2}^{(2)}$$

(*) Si sono considerate disuguaglianze forti perché, in caso di uguaglianza, il problema sarebbe risolto acquistando il titolo tra i due la cui duration coincide con $\boldsymbol{D}$.

La duration del portafoglio è pertanto

$$\begin{aligned}
D^{(\Pi)} &= \frac{\sum_{k=1}^{n_1} t_k R_k v(t,t_k)}{V^{(1)}+V^{(2)}} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n_1} t_k^{(1)} R_k^{(1)} v\left(t,t_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n_2} t_k^{(2)} R_k^{(2)} v\left(t,t_k^{(2)}\right)}{V^{(1)}+V^{(2)}} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n_1} t_k^{(1)} R_k^{(1)} v\left(t,t_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n_2} t_k^{(2)} R_k^{(2)} v\left(t,t_k^{(2)}\right)}{V^{(1)}+V^{(2)}} \\
&= \frac{D^{(1)}V^{(1)}+D^{(2)}V^{(2)}}{V^{(1)}+V^{(2)}}
\end{aligned} \tag{193}$$

Denotando con V l'importo che l'operatore investe complessivamente nell'acquisto dei due titoli, l'obiettivo di immunizzazione per l'epoca D si traduce nel risolvere il seguente sistema nelle incognite $V^{(1)}$ e $V^{(2)}$:

$$\begin{cases} V^{(1)}+V^{(2)}=V & \textbf{(Vincolo di bilancio)} \\[2ex] \dfrac{D^{(1)}V^{(1)}+D^{(2)}V^{(2)}}{V^{(1)}+V^{(2)}} = D & \textbf{(Vincolo di duration)} \end{cases}$$

Si può facilmente verificare che la soluzione è

$$\begin{cases} V^{(1)} = V \dfrac{D^{(2)} - D}{D^{(2)} - D^{(1)}} \\ \\ V^{(2)} = V \dfrac{D - D^{(1)}}{D^{(2)} - D^{(1)}} \end{cases} \tag{194}$$

Quindi, **affinché il portafoglio risulti immunizzato per l'epoca D, occorre acquistare la quota $V^{(1)}$ del primo titolo e la quota $V^{(2)}$ del secondo titolo**.

Esempio 45

All'epoca $t = 0$, si vogliono immunizzare 5.000€ per l'epoca $t = 2{,}2$ (2 anni, 2 mesi e 12 giorni). Sul mercato non sono trattati titoli aventi duration $D = 2{,}2$ ma – tra le altre – sono scambiate le due seguenti obbligazioni, entrambe di valore nominale pari a 100€ e valutate al tasso di interesse effettivo annuo $i = 6{,}75\%$:

Titolo 1	**Titolo 2**
Prezzo $92{,}196$€. Rimborso del valore nominale: 75€ alla fine del primo anno, 25€ alla fine del secondo anno.	Prezzo$82{,}105$€. Rimborso del valore nominale: 10€ alla fine del primo anno, 15€ alla fine del secondo anno, 35€ alla fine del terzo anno, 40€ alla fine del quarto anno.

k	R_k	$R_k v^k$	$kR_k v^k$
0	$-92{,}196$		
1	75	$70{,}25761$	$70{,}25761$
2	25	$21{,}93836$	$43{,}87673$
	Σ	$92{,}19598$	$114{,}1343$
		$\boldsymbol{D^{(1)}}$	$\mathbf{1{,}237954}$

k	R_k	$R_k v^k$	$kR_k v^k$
0	-82.105		
1	10	$9{,}367681$	$9{,}367681$
2	15	$13{,}16302$	$26{,}32604$
3	35	$28{,}77163$	$86{,}31488$
4	40	$30{,}80268$	$123{,}2107$
	Σ	$82{,}105$	$245{,}2193$
		$\boldsymbol{D^{(2)}}$	$\mathbf{2{,}986655}$

Esempio 45 (segue)

Essendo

$$1{,}237954 = D^{(1)} < D = 2{,}2 < D^{(2)} = 2{,}986655$$

è possibile costruire, con le due obbligazioni date, un portafoglio immunizzato per la scadenza D.

In primo luogo occorre determinare quale somma impiegata all'epoca $t = 0$ potrà garantire allo smobilizzo in $t = 2{,}2$ la somma di 5.000€.

$$V = 5.000(1 + 0{,}0675)^{-2{,}2} \simeq 4.330{,}72$$

Di tale somma si dovranno investire

$$V^{(1)} = V \frac{D^{(2)} - D}{D^{(2)} - D^{(1)}} = 4.330{,}72 \frac{2{,}986655 - 2{,}2}{2{,}986655 - 1{,}237954} \simeq 1.948{,}18€$$

nel titolo 1 e

$$V^{(2)} = V \frac{D - D^{(1)}}{D^{(2)} - D^{(1)}} = 4.330{,}72 \frac{2{,}2 - 1{,}237954}{2{,}986655 - 1{,}237954} \simeq 2.382{,}54€$$

nel titolo 2.

Dato il prezzo delle due obbligazioni, si dovranno acquistare rispettivamente $n^{(1)} = \frac{1.948{,}18}{92{,}196} \simeq 21{,}13\ (21)$ contratti del titolo 1 e $n^{(2)} = \frac{2.382{,}54}{82{,}105} \simeq 29{,}02\ (29)$ contratti del titolo 2.