

A TWO-COMPONENT PUBLIC PENSION SYSTEM UNDER DEMOGRAPHIC EQUILIBRIUM: A SUBSTITUTION RATE FOR BENEFIT ADEQUACY

ANNA ATTIAS

Rome University Sapienza

anna.attias@uniroma1.it

ABSTRACT

In a previous paper we analyzed the impact of demographic equilibrium on a pay-as-you-go pension system. The present work aims to extend those results by detecting a flexible contribution rate in terms of pension benefit adequacy, i.e. in terms of substitution rate, that allows coping with the risk of a contributory pension system not suited to guarantee acceptable living standards.

We build an econometric model to test the impact of a new Italian public pension system related to the Cazzola-Treu one. A mathematical/actuarial pension benefit framework is studied. It is based on some parameters variation in relation to a marginal rate of substitution fixed at a lower bound, upon the approval of suitable improvements of the proposed public pension system. Since such system is closely related to the one adopted in UK, our mathematical model might be adjusted to fit into the Anglo-Saxon law.

KEY WORDS: demographic balance, substitution rate, fixed and contributory pension benefit share, adequacy.

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

ANNA ATTIAS

Sapienza Università di Roma

anna.attias@uniroma1.it

SOMMARIO

In questo lavoro si è inteso estendere i risultati di un precedente articolo nel quale si è verificato l'impatto che l'equilibrio demografico asintotico ha sul nostro sistema pensionistico gestito a ripartizione, per individuare un'aliquota contributiva flessibile che, in termini di tasso di sostituzione, in altre parole di adeguatezza delle prestazioni, consenta di fronteggiare il rischio calcolato di una pensione contributiva non adatta al mantenimento del tenore di vita. La logica seguita è stata quella di costruire un modello econometrico per la verifica dell'impatto delle nuove ipotesi legislative italiane in ambito pensionistico, in particolare quelle riferibili alla proposta Cazzola - Treu. Si è cioè studiato e formalizzato un impianto matematico/attuariale delle mutazioni delle pensioni e di alcuni suoi parametri, in relazione ad un tasso di sostituzione fissato in un limite inferiore, in caso di approvazione dei correttivi previsti nella proposta di legge.

Essendo tale proposta molto vicina alle logiche pensionistiche del sistema di base del Regno Unito è poi possibile, con modifiche irrilevanti da un punto di vista sostanziale, adeguare il modello matematico costruito alla legislazione anglosassone

PAROLE CHIAVE: equilibrio demografico, tasso di sostituzione, quota fissa di pensione e quota contributiva, adeguatezza.

INTRODUZIONE

Secondo l'Unione Europea una rendita pensionistica può considerarsi adeguata se, oltre a prevenire l'esclusione sociale, consente il mantenimento del tenore di vita nella fase di quiescenza. In realtà l'Unione Europea non ha mai legiferato in materia di adeguatezza pensionistica in quanto, in base ai trattati UE, la competenza previdenziale resta dei singoli stati membri, ha però dato indicazioni precise nel Consiglio di Lisbona del 2000 perché in relazione alla previdenza gli Stati garantiscano "la sostenibilità finanziaria a medio e lungo termine dei sistemi pensionistici", ma anche "...l'adeguatezza delle pensioni...". Nella relazione 2009 del Comitato Economico e Sociale Europeo, si specifica che: "... la strategia post 2010 dev'essere maggiormente orientata verso il progresso sociale, il rafforzamento e la sostenibilità dei sistemi di sicurezza sociale e la lotta contro la povertà...". L'Italia non ha una situazione serena in termini di tassi di sostituzione futuri, intendendo con questo termine il rapporto tra primo rateo di pensione ed ultimo salario (così come definito da Angrisani 2000 e 2002), soprattutto per coloro che si pensioneranno con il contributivo. Appare necessario, anche sulla scorta delle indicazioni comunitarie, intervenire oggi per garantire alla popolazione pensionata un futuro di stabilità (Angrisani 2008) e dignità (Attias 2007b) nel rispetto dei principi di equità e solidarietà intergenerazionale (Angrisani 2003). In un lavoro presentato al XIII Convegno della Teoria del Rischio (Attias 2007a) si è formalizzato a tale proposito un modello dinamico attuariale che, con l'obiettivo dell'adeguatezza, costruisce i tassi di sostituzione desiderati rispetto a modificazioni di età di pensionamento e/o aliquote contributive. Il dibattito è aperto e lungi dall'essere risolto ed è anche in questa ottica che è stato presentato da Cazzola e Treu un disegno di legge sul sistema pensionistico che si prefigge di far attestare il tasso di sostituzione ad una soglia minima del 60%.

Per inquadrare la problematica pensionistica del nostro Paese basta dire che coloro che sono andati o andranno in pensione con il calcolo effettuato su base retributiva, cioè con regole precedenti la L.335/95, hanno diritto ad una rendita che, raggiunti tutti i requisiti massimi, è

pari ad oltre l'88% dell'ultima retribuzione¹. Con la riforma Dini a regime, cioè con calcolo della pensione completamente contributivo, il tasso di sostituzione scenderà drasticamente.

Al problema dell'adeguatezza si affianca quello della sostenibilità.

In un sistema pensionistico gestito a ripartizione, come è il nostro, i fattori di natura demografica (Myers 1994, Varga 1984, Varga et al. 2011) sono fondamentali. I dati che preoccupano previdenzialmente sono riferibili ovviamente ai tassi di fecondità ed alle aspettative di vita. Dopo i cosiddetti *baby boomers*, esiste un buco provocato dalle diminuite nascite dagli anni 70 in poi². L'Italia oggi ha un tasso di fecondità dell'1,41%, era di 1,2% nel 2007 ed il minimo storico è del 1995 con 1,19. Questo incremento, comunque non sufficiente a rimpiazzare le generazioni dei genitori per cui servirebbe un 2,1, è dovuto soprattutto alla presenza della popolazione immigrata che, almeno per la prima generazione, ha un tasso di fecondità mediamente molto più alto di quello della popolazione italiana e alle donne non più giovanissime che decidono per la maternità, le cosiddette primipare attempate³. La speranza di vita alla nascita è mediamente superiore per sessi agli 80 anni ed è aumentata considerevolmente l'aspettativa di vita al pensionamento. Dunque la popolazione invecchia e contemporaneamente diminuisce, essendo i nati non sufficienti a rimpiazzare i morti.

A tutto questo si affianca un cambio di struttura della famiglia, oggi impossibilitata ad essere in modo pieno il luogo di cura, sostegno ed assistenza per gli anziani.

Le criticità del nostro sistema di *welfare* diverranno dunque esplosive quando proprio le generazioni dei *baby boomers* si pensioneranno.

Ulteriore elemento di complessità è la corretta stima del rischio sistemico derivante dall'incertezza delle tendenze future della mortali-

¹ Il rapporto Itat-Inps, pubblicato a giugno 2011 e riferibile a dati 2009, indica che il 14,7% delle pensioni (che sono retributive) sono al di sotto dei 500 € (molte di queste sono integrative), il 31,8% è tra i 500 ed i 1.000 € ed il 46,5% al di sotto dei 1.000 €. Nella prima fascia il 61,3% sono donne ed il 36% sono uomini, mentre nella seconda il *gap* si riduce notevolmente, invertendosi per le fasce più alte. La spesa pensionistica è il 14,1% del Pil e per l'80% è erogata dall'Inps.

² Cfr. [19].

³ Cfr. [10].

tà, noto in letteratura come *longevity risk*. Sotto il profilo attuariale l'eventuale sottostima delle probabilità di sopravvivenza per individui appartenenti ad un'assegnata generazione comporta il rischio di erogazione di rendite vitalizie per un periodo più lungo di quello atteso.

Vanno pensati oggi approcci alternativi a sostegno di questa realtà: il sistema pensionistico deve essere visto nella sua globalità, considerando al contempo i sistemi di base, siano essi pubblici, come l'Invalidità Vecchiaia e Superstiti (IVS), o privati, come le casse di previdenza dei liberi professionisti, e quelli complementari che ad oggi non sono decollati.

Dunque la situazione italiana presenta grosse criticità, ma possiamo dire che risulta acclarata l'insostenibilità dei sistemi previdenziali a ripartizione in tutta Europa essendo generalizzate le problematiche demografiche che, come si è detto, sono soprattutto le basse fecondità e l'invecchiamento della popolazione. Molti Paesi europei hanno affrontato il problema: Fehr e Haberman (2006) per la Germania, Blake e Mayhew (2006) per il Regno Unito, Sánchez e Alfonso (2010) per la Spagna, per citarne solo alcuni. Del resto è nel Libro Verde del 2010 che testualmente si dice: "garantire a tutti i cittadini, oggi e in futuro, un reddito di pensione adeguato e sostenibile è uno degli obiettivi primari dell'Unione Europea".

In questo lavoro si vuole in particolare affrontare il problema dell'adeguatezza che probabilmente avrà una ripercussione negativa addirittura più veloce della non sostenibilità nel nostro Sistema Paese, poiché creerà una fascia di popolazione indigente alla quale non siamo né abituati né pronti a fronteggiare. Presto avremo pensionati figli del pro-rata e dunque con tassi di sostituzione pari a circa i 2/3 di quelli di coloro che sono andati in quiescenza con il retributivo pieno, seguiti a ruota da figli del contributivo, cioè a regime della 335/95, che vedranno la loro rendita pensionistica attestarsi a percentuali di tasso di sostituzione sotto il 40%, senza quindi nessuna logica di continuità di reddito in quiescenza. I pensionati saranno i futuri veri poveri.

È dimostrato (Angrisani et al. 2006) che, sulla base del modello di Leslie (1945, 1948) e della teoria di Perron-Frobenius, una popolazione sottostante un sistema pensionistico converge ad una situazione di equilibrio dal punto di vista della distribuzione per età se i tassi di ri-

produzione e di sopravvivenza rimangono costanti e in assenza di flussi migratori (Alho, Spencer 2005)⁴.

Si vuole ora, partendo dal Teorema sull'esistenza di un equilibrio demografico asintotico (Angrisani et al. 2006), e dall'aliquota contributiva flessibile dell'articolo Attias 2007a, modellizzare il tutto in funzione della proposta di legge (Cazzola - Treu 2010), che riapre, di fatto, il cantiere della previdenza di base, sempre che sia mai stato chiuso.

Nella prima sezione è inquadrata la proposta di legge, nella seconda è richiamato il Teorema sull'esistenza di un equilibrio demografico asintotico, nella terza e nella quarta sono descritte le dinamiche delle basi tecniche riferite ad attivi, pensionati, salari e pensioni.

Nell'ultima sezione, sulla base di quanto presentato nelle sezioni precedenti, è costruito il modello matematico dell'ipotesi Cazzola - Treu che prevede due quote di pensione base, nello stile anglosassone, una fissa ed una contributiva. Si giunge alla formalizzazione del tasso di sostituzione che ha come parametri principali di flessibilità l'anzianità contributiva e l'età di pensionamento, corrispondenti all'equilibrio demografico asintotico. Il dato della quota di pensione contributiva, lavorato con la quota fissa, di cui alla proposta di legge, ci consente di ragionare sul futuro tasso di sostituzione globale, funzione dei parametri del modello, che può godere appunto della doppia flessibilità, anzianità ed età, nell'ottica di eliminare o almeno ridurre il rischio calcolato di una prestazione che non consente, ai lavoratori divenuti pensionati, di mantenere entro limiti ragionevoli il loro tenore di vita.

Il contributo di questo lavoro è quello di aver formulato un modello matematico/attuariale dinamico della proposta di legge Cazzola - Treu utilizzando l'apporto metodologico del modello dinamico per la componente demografica, anche se alcuni dei parametri demografici finanziari ed attuariali si sono ipotizzati costanti.

⁴ Rispetto all'immigrazione ci sono numerosi studi (Nannestad 2007 e Wenko 2008), ma nessuno giunge alla definizione di una strategia ottima di immigrazione in modo tale che la popolazione converga ad un equilibrio da un punto di vista della distribuzione per età. Un primo passo verso un algoritmo relativo ad un modello di controllo dell'immigrazione è di Angrisani et al. (2010).

Il passo successivo sarà di tipo applicativo: testare le differenze in termini di sola adeguatezza (qui non si affronta la sostenibilità) rispetto alla legislazione vigente e misurare le possibili combinazioni di anzianità contributiva, età di pensionamento, caratteristiche di accesso alla quota fissa ed importo della stessa per giungere ad un punto di equilibrio (di dignità e non povertà) tra ciò che si dà nel tempo (e per quanto tempo) da attivi e ciò che si prenderà in quiescenza. L'aspettativa di rateo di pensione dei futuri pensionati non può essere disattesa né in termini filosofici né in termini sostanziali: è in gioco il futuro delle prossime generazioni di anziani, è in gioco il futuro del Paese.

1. LA PROPOSTA DI LEGGE CAZZOLA TREU

“Delega al Governo per l'introduzione della pensione di base e l'unificazione graduale dell'aliquota contributiva a favore dei lavoratori alla prima occupazione, nonché per l'introduzione del pensionamento flessibile e per la revisione dei trattamenti previdenziali vigenti”.

Nella proposta si fa riferimento alla Relazione della Commissione Europea sull'invecchiamento demografico del 2009 che, nella Comunicazione n° 180 del 29 aprile, per quanto attiene alle problematiche demografiche dice tra l'altro: “...Esiste un margine di manovra - un periodo di circa dieci anni durante il quale la forza lavoro continuerà a crescere⁵ - per attuare le riforme strutturali rese necessarie dall'invecchiamento demografico...non agire vorrebbe dire ridurre la capacità di soddisfare i futuri bisogni di una popolazione che invecchia...”. Si conferma inoltre, nella relazione preliminare alla proposta, che la Dini “...ha senz'altro permesso di razionalizzare il sistema, attraverso il contenimento, se non la definitiva stabilizzazione, della spesa”, ma

⁵ Il rapporto sull'invecchiamento (Cfr.[13]) indica che, in conseguenza della contrazione della forza lavoro, la sola fonte di crescita fino al 2020 sarà la produttività del lavoro, come del resto riportato anche nel Libro Verde della Commissione Europea del 2010.

che nel contempo i successivi interventi legislativi ne hanno ridotto la filosofia di flessibilità rispetto all'età di quiescenza che certamente deve essere recuperata, anche in un'ottica di equità.

Altro problema che è affrontato è quello dell'equiparazione delle aliquote contributive per tutte le categorie di lavoratori. Si dice testualmente che: "...un intervento di armonizzazione della contribuzione sociale, per risultare sostenibile a regime, necessita non solo di un'attenta calibratura dell'aliquota unificata, ma anche di una complessiva revisione della struttura del sistema previdenziale, che tenga conto tanto delle esigenze di copertura tendenzialmente universalistica delle prestazioni, quanto delle preoccupazioni circa l'adeguatezza delle pensioni future calcolate secondo il sistema contributivo". Dunque il problema dell'adeguatezza è sentito fortemente perché non è solo il metodo di calcolo contributivo a rendere non accettabile il futuro tasso di sostituzione ma anche una serie di fattori economici e sociali che la Dini non ha previsto "...rallentamento della crescita economica...turbolenza dei mercati...discontinuità e precarietà delle condizioni di lavoro...riduzione dinamiche retributive..."⁶. Il sistema pensionistico non è una monade isolata e la non efficienza del mercato del lavoro lo mina alla base.

In un sistema così concepito cadono i cardini dell'equità e della solidarietà intergenerazionale, alla base della filosofia e della tecnica dei sistemi finanziari di gestione a ripartizione, ed è nello spirito di recupero di tali principi ed in un'ottica di sostenibilità ed adeguatezza che nasce la proposta Cazzola - Treu.

La disciplina di delega prevede vari aspetti. Riportiamo integralmente quelli di cui ci occuperemo nello specifico:

- l'applicazione di un'aliquota unica di contribuzione alla gestione di previdenza obbligatoria di appartenenza, in misura com-

⁶ Susanna Camusso, Segretario Generale Cgil, dichiara che: "Nel biennio 2008-2009 abbiamo perso sei punti di Pil, che avranno un effetto secco sulle future pensioni calcolate con il metodo contributivo. Un effetto aggravato dall'inasprimento dei coefficienti di trasformazione...sulle pensioni peserà anche il basso livello delle retribuzioni, che si accentua proprio nei settori dove sono più presenti i giovani e la discontinuità dei rapporti di lavoro avrà conseguenze significative sulle pensioni calcolate con il metodo contributivo..."

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

plensiva pari al ventisei per cento del reddito lordo da lavoro, per due terzi a carico del datore di lavoro e per un terzo a carico del prestatore (si prevedono ovviamente criteri di gradualità, soprattutto per quelle categorie che oggi hanno aliquote inferiori e decade completamente l'idea, più volte enunciata, di consentire scelte di aumento nella contribuzione);

- la generale assimilazione dell'aliquota di computo a quella di contribuzione;
- il riconoscimento di un trattamento pensionistico obbligatorio articolato secondo due componenti: una pensione di base finanziata dalla fiscalità generale, di importo pari all'attuale assegno sociale⁷ (dal 1996 sostituisce a tutti gli effetti la pensione sociale) e rivalutabile secondo le medesime disposizioni⁸; e una pensione calcolata secondo il vigente sistema contributivo⁹; ciò allo scopo di assicurare, in particolare ai soggetti con minore capacità reddituale e contributiva, trattamenti pensionistici obbligatori complessivi e lordi non inferiori al 60 per cento della retribuzione di riferimento¹⁰;

⁷ Dal 1° gennaio 2011 l'importo dell'assegno sociale aumenta dell'1,4% rispetto al 2010, attestandosi a 417,30 €, pari a 5.424,90 euro annuali.

⁸ Articolo 3, comma 6, legge 8 agosto 1995, n. 335, rivalutabile ai sensi del medesimo articolo 3.

⁹ Ai sensi dell'articolo 1, commi 6 e seguenti, della legge 8 agosto 1995, n. 335, e successive modificazioni.

¹⁰ Come si diceva prima, in realtà i tassi di sostituzione previsti al momento, a regime della Dini, sono inferiori al 40%.

- l'accesso alla pensione di base è condizionato al possesso dei seguenti requisiti, contributivi e anagrafici: almeno dieci anni di soggiorno legale, anche non continuativo, nel territorio nazionale; almeno dieci anni complessivi di contribuzione effettiva, anche non continuativa, ad una o più gestioni di previdenza obbligatoria; la maturazione dei requisiti anagrafici già previsti dalla legge per l'accesso alla pensione contributiva.

A questi nuovi criteri si aggiunge:

- la revisione dei criteri di perequazione automatica delle pensioni attraverso l'introduzione di forme di indicizzazione miste, riferite tanto all'andamento del costo della vita, quanto alla dinamica delle retribuzioni dei lavoratori attivi;
- il ripristino del pensionamento flessibile - unificato per vecchiaia e anzianità, per tipologia di lavoro (dipendente, autonomo e parasubordinato) e per genere - in favore dei lavoratori ai quali si applica, anche *pro rata*, il sistema contributivo, secondo principi e criteri che tengano conto, ai fini del requisito anagrafico minimo per l'accesso alla pensione, dei limiti di età vigenti a regime nel sistema retributivo.

Sono poi previsti sostegni per i parasubordinati, agevolazioni pensionistiche per le lavoratrici madri e un "piano nazionale per il prolungamento della vita attiva".

Cerchiamo di costruire un modello matematico/attuariale di questa proposta di legge partendo dal teorema dell'equilibrio asintotico¹¹ e dalla formalizzazione del tasso di sostituzione flessibile per contribuzione ed età di quiescenza¹². Il tutto deve essere formalizzato tenendo ferme le ipotesi legislative per le due quote pensionistiche, la contributiva e la fissa:

- aliquota di computo e contributiva pari al 26%¹³;
- almeno 10 anni di contribuzione anche non continuativi;
- tasso di sostituzione pari almeno al 60%.

2. EQUILIBRIO DEMOGRAFICO ASINTOTICO: RICHIAMI AL TEOREMA

Considerando il modello classico di Lesile si ha:

una popolazione suddivisa in N gruppi di età ($N \in \mathbf{N}$);

$x_i(t)$ il numero di individui di età $[i, i+1)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ (anni);

$\alpha_i \geq 0$ il tasso medio di natalità ;

$0 < \omega_i < 1$ la probabilità di sopravvivenza;

$x(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)]^T$ il vettore di stato della popolazione.

Con queste informazioni costruiamo la matrice di Leslie e conseguentemente la dinamica della popolazione:

¹¹ Cfr. [6].

¹² Cfr. [8].

¹³ E' di settembre 2011 la dichiarazione di Treu sulla possibilità che questa si attesti al 28%, cfr. [26]

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} \\ \omega_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \omega_{N-2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t+1) = L x(t) \quad (t = 0, 1, 2, \dots).$$

Si indicano poi con:

$x^F(t)$ e $x^M(t)$ i vettori di stato della popolazione femmine e maschi, di dimensione Ω ;

f_i il tasso di fertilità per mille;

q_i^F il tasso di mortalità;

$\alpha_i = \frac{f_i}{1000}$ la relazione tra tasso di natalità e di fertilità;

$\varphi = \frac{x_0^F(0)}{x_0^F(0) + x_0^M(0)} = \frac{x_0^F(0)}{x_0(0)}$ la quota di femmine alla nascita sulla

popolazione totale all'anno 0¹⁴; $\alpha_i^F = \frac{f_i}{1000} \varphi$ il tasso di natalità¹⁵;

$\omega_i^F = 1 - q_i^F$ il tasso di sopravvivenza delle femmine con $i = 0, 1, \dots, \Omega - 2$; dove Ω rappresenta il numero di classi di età considerate.

Con queste informazioni costruiamo le $\Omega \times \Omega$ matrice di Leslie femmine e maschi e le conseguenti dinamiche della popolazione distinte per genere.

¹⁴ Che può essere considerata costante.

¹⁵ Considerando le donne riproduttive tra i 15 e i 50 anni, si ha $i = 15, \dots, 50$ ed il tasso di natalità è 0 per i gruppi di età che non rientrano in questa fascia.

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE
 QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

$$L^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha^F_{15} & \dots & \alpha^F_{50} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega^F_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega^F_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \omega^F_{\Omega-2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^F(t+1) = L^F x^F(t);$$

$$L^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega^M_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega^M_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \omega^M_{\Omega-2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^M(t+1) = L^M x^M(t) + \frac{(1-\varphi)}{\varphi} e_1 \circ L^F x^F(t);$$

dove $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ è il vettore base di dimensione Ω , e \circ indica il prodotto di Hadamard.

Il vettore di stato della popolazione totale e la conseguente dinamica sono:

$$x = \begin{bmatrix} x^F \\ x^M \end{bmatrix}, \quad x(t+1) = \Lambda x(t).$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} L^F & 0 \\ d & 0 \\ 0 & L^M \end{bmatrix}, \text{ matrice blocco } 2\Omega \times 2\Omega \text{ che è costruita definendo:}$$

$d = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1-\varphi}{\varphi} \alpha_{15} & \dots & \frac{1-\varphi}{\varphi} \alpha_{50} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ (riga di dimensione Ω) e

$$L_1^M = \begin{bmatrix} \omega_0^M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^M & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{\Omega-2}^M & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matrice } \Omega-1 \times \Omega).$$

Si riporta integralmente dal precedente articolo che: “...La matrice riferita all’intera popolazione non soddisfa le condizioni del teorema di Perron - Frobenius delle matrici nonnegative, primitive ed irriducibili. Tali condizioni sono invece soddisfatte dalla sottomatrice corrispondente alla sottopopolazione delle femmine fertili per la quale si dimostra quindi l’esistenza di un equilibrio demografico asintotico. Si verifica poi che è possibile estendere tale risultato all’intera popolazione dimostrando il seguente teorema:

Teorema 1: esiste un equilibrio demografico, cioè uno stato x^0 della popolazione tale che x^0 è un autovettore nonnegativo della matrice Λ con autovalore associato λ_0 positivo. Per questo la distribuzione d’età nella popolazione, a lungo andare, tende ad uno stato di equilibrio nel senso che per ogni stato iniziale $x(0)$ esiste un numero $s > 0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\lambda_0^t} = sx^0.”$$

E’ utilizzato questo teorema per esplicitare condizioni di equilibrio attuariale rispetto alla proposta di legge Cazzola - Treu. Si vuole stimare se il tasso di sostituzione tendenziale è effettivamente quello che si vuole prevedere, in ipotesi di equilibrio demografico, quando parte-

cipano alla formazione del rateo pensionistico le due quote previste dalla legge e in ipotesi di entrata a regime dell'aliquota contributiva uniforme per tutte le categorie di lavoratori. Si vuole, di fatto, misurare quali sono i *range* effettivi di variazione delle variabili che concorrono alla formazione del rateo di pensione, cioè età di quiescenza ed anzianità contributiva, ricordando che si indica un'aliquota del 26%, distribuita nei 2/3 a carico del datore di lavoro¹⁶ e 1/3 a carico del lavoratore, perché si raggiunga l'auspicata soglia del 60% di tasso di sostituzione indicata dai proponenti il disegno di legge e che è una vera e propria clausola sociale di garanzia.

Una considerazione ulteriore deve essere fatta rispetto ai coefficienti di trasformazione che, a seguito della L. 122 del 30 luglio 2010, sono aggiornati ogni 3 anni in relazione all'aspettativa di vita¹⁷.

3. BASI TECNICHE DEMOGRAFICHE: ATTIVI E PENSIONATI

Distinguiamo le popolazioni degli attivi e dei pensionati per sesso.

$l_i^F(h, t)$ numero donne attive, con i l'età, t il tempo, h ($1 \leq h \leq H$) gli anni di anzianità di servizio. $l_i^F(h, t) = 0$, se $0 \leq i \leq h + 18$ ¹⁸ o $65 \leq i \leq \Omega - 1$.

L'equazione di bilancio per le attive, in ipotesi statica, con ${}_{dir}^{nuo} P_i^F(h, t)$ e ${}_{inv}^{nuo} P_i^F(h, t)$ rispettivamente le nuove pensionate dirette e

¹⁶ E' di settembre 2011 (Il Sole24ore) la proposta a firma Paolo Onofri di Prometeia (associazione per le previsioni econometriche) di ridurre gli oneri contributivi a carico dei datori di lavoro, a fronte di un aumento dell'aliquota IVA sui beni di consumo: "una misura che ha il vantaggio di offrire un sostegno economico alle imprese esportatrici, agendo come una sorta di svalutazione per via fiscale".

¹⁷ Per la stessa legge, dal 1° gennaio 2015 anche l'aumento dell'età pensionabile, legato all'aspettativa di vita, avverrà con cadenza triennale e non più quinquennale (l'ipotesi governativa di giugno 2011 vede tali modifiche anticipate al 2013). Secondo il ministro del Lavoro Maurizio Sacconi "si tratta di una sorta di piccola finestra mobile, sostanzialmente impercettibile per le persone".

¹⁸ Ipotizzando l'aumento dell'obbligo scolastico a 18 anni e quindi sempre a 18 l'ingresso nel mondo del lavoro. In realtà si dovrebbe fissare quest'ultimo a 20, in linea con gli altri Paesi Europei, e a 22 per rispettare il dato reale del nostro Paese. E' banale, se si vuole, l'intervento sull'indicatore nel modello.

di invalidità ed inabilità¹⁹ (pari a zero per anzianità inferiori ai 10 anni nell'ipotesi Cazzola - Treu), è:

$$l_{i+1}^F(h+1, t+1) = l_i^F(h, t)\omega_i^F - {}_{dir}P_i^F(h, t) - {}_{inv}P_i^F(h, t).$$

$\tau_i^F(t)$ tasso di prima occupazione, con vettore $\tau^F(t) = (\tau_0^F(t), \tau_1^F(t), \dots, \tau_{\Omega-1}^F(t))$.

${}^{nuo}l^F(t) = x^F(t) \circ \tau^F(t)$ vettore delle nuove occupate.

Se ipotizziamo ${}^{nuo}P_i^F(h, t) = {}_{dir}P_i^F(h, t) + {}_{inv}P_i^F(h, t)$ si ha:

$$\text{per } h = 1 \quad l_{i+1}^F(1, t+1) = {}^{nuo}l_i^F(t)\omega_i^F,$$

$$\text{e per } h > 1 \quad l_{i+1}^F(h+1, t+1) = l_i^F(h, t)\omega_i^F - {}^{nuo}P_i^F(h, t).$$

Analogamente per i maschi:

$$l_{i+1}^M(1, t+1) = {}^{nuo}l_i^M(t)\omega_i^M, \quad \text{per } h = 1$$

$$l_{i+1}^M(h+1, t+1) = l_i^M(h, t)\omega_i^M - {}^{nuo}P_i^M(h, t), \quad \text{per } h > 1.$$

$\gamma_i(h, t)$ è il tasso di pensionamento.

Per calcolare il numero dei nuovi pensionati maschi e femmine, bisogna considerare che, per percepire la pensione diretta d'anzianità o vecchiaia deve essere $h \geq 35$ ²⁰, e l'età i deve essere tale che $58 \leq i \leq a$ ²¹, che in realtà deve essere letto non 58 ma 59 per alcune categorie di lavoratori²². Dunque $\gamma_a(h, t) = 1$. 40 anni di contribuzione è il requisito che prescinde oggi dall'età anagrafica.

¹⁹ Considerate una sola voce.

²⁰ La legge Damiano del 2007 prevede che la quota di accesso alla pensione di anzianità (oggi 96 per i dipendenti e 97 per gli autonomi) possa salire nel 2013 di un anno per tutti i lavoratori, sulla base della verifica dei conti. E' quindi certa. L'attuale ipotesi governativa è che questo debba avvenire già dalla metà del 2012.

²¹ Il 58 è frutto della riforma Prodi Damiano, L.247/2007.

²² Dipendenti pubblici e privati, lavoratori autonomi iscritti all'INPS.

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

E' necessario sottolineare che, a partire da luglio 2010²³, il momento del pensionamento è slittato, di fatto, di un anno per i lavoratori dipendenti e di 18 mesi per quelli autonomi, con l'introduzione delle cosiddette finestre mobili, elegante definizione che dice, ma non vuol dire, che l'età pensionabile è aumentata rispettivamente di 12 e 18 mesi.

Da cui:

$$\frac{nuo}{dir}P_i^F(h,t) = \gamma_i(h,t) l_i^F(h,t), \quad \frac{nuo}{dir}P_i^M(h,t) = \gamma_i(h,t) l_i^M(h,t).$$

Il numero totale dei nuovi pensionati diretti è:

$$\frac{nuo}{dir}P_i(h,t) = \frac{nuo}{dir}P_i^F(h,t) + \frac{nuo}{dir}P_i^M(h,t).$$

Sommando rispetto all'anzianità di servizio, il numero dei nuovi pensionati diretti di età i è:

$$\frac{nuo}{dir}P_i^F(t) = \sum_{h=1}^H \frac{nuo}{dir}P_i^F(h,t), \quad \frac{nuo}{dir}P_i^M(t) = \sum_{h=1}^H \frac{nuo}{dir}P_i^M(h,t).$$

Da cui:

$$\frac{nuo}{dir}P_i(t) = \frac{nuo}{dir}P_i^F(t) + \frac{nuo}{dir}P_i^M(t).$$

La dinamica ricorrente per i vecchi pensionati diretti di età i nell'anno t , è:

$$\frac{vec}{dir}P_{i+1}^F(t+1) = \left(\frac{vec}{dir}P_i^F(t) + \frac{nuo}{dir}P_i^F(t) \right) \omega_i^F,$$

$$\frac{vec}{dir}P_{i+1}^M(t+1) = \left(\frac{vec}{dir}P_i^M(t) + \frac{nuo}{dir}P_i^M(t) \right) \omega_i^M.$$

La corrispondente formula per il totale dei vecchi pensionati diretti è:

$$\frac{vec}{dir}P_i(t) = \frac{vec}{dir}P_i^F(t) + \frac{vec}{dir}P_i^M(t).$$

Il totale dei pensionati diretti di età i all'anno t è:

$$\frac{dir}{dir}P_i(t) = \frac{nuo}{dir}P_i(t) + \frac{vec}{dir}P_i(t).$$

Indicando con ψ_i^F e ψ_i^M la probabilità rispettivamente di un'attiva/o d'invalidarsi/inabilitarsi, e considerando che $10 \leq h < a - 18$, si hanno i nuovi pensionati d'invalidità/inabilità, femmine e maschi:

²³ Decreto legge 31 maggio 2010, convertito in Legge 30 luglio 2010, n.122, art. 12.

$${}_{inv}^{nuo}P_{i+1}^F(h, t+1) = l_i^F(h, t)\omega_i^F\psi_i^F, \quad {}_{inv}^{nuo}P_{i+1}^M(h, t+1) = l_i^M(h, t)\omega_i^M\psi_i^M.$$

Ricordando che la probabilità di eliminarsi per morte di un invalido/inabile è diversa da quella della popolazione generale, per l'anno seguente, la indichiamo con $\bar{\omega}_i^F$ e $\bar{\omega}_i^M$, da cui:

$$\begin{aligned} {}_{inv}^{vec}P_{i+1}^F(h, t+1) &= [{}_{inv}^{vec}P_i^F(h, t) + {}_{inv}^{nuo}P_i^F(h, t)]\bar{\omega}_i^F, \\ {}_{inv}^{vec}P_{i+1}^M(h, t+1) &= [{}_{inv}^{vec}P_i^M(h, t) + {}_{inv}^{nuo}P_i^M(h, t)]\bar{\omega}_i^M. \end{aligned}$$

Il corrispondente totale di femmine e maschi, sommando rispetto all'anzianità è:

$${}_{inv}^{nuo}P_i^F(t) = \sum_{h=1}^H {}_{inv}^{nuo}P_i^F(h, t), \quad {}_{inv}^{nuo}P_i^M(t) = \sum_{h=1}^H {}_{inv}^{nuo}P_i^M(h, t) \quad \text{e, sommando}$$

per sessi si ha che,

$${}_{inv}^{nuo}P_i(t) = {}_{inv}^{nuo}P_i^F(t) + {}_{inv}^{nuo}P_i^M(t).$$

Analogamente per i vecchi pensionati d'invalidità/inabilità:

$${}_{inv}^{vec}P_i^F(t) = \sum_{h=1}^H {}_{inv}^{vec}P_i^F(h, t), \quad {}_{inv}^{vec}P_i^M(t) = \sum_{h=1}^H {}_{inv}^{vec}P_i^M(h, t).$$

Sommando per sessi:

$${}_{inv}^{vec}P_i(t) = {}_{inv}^{vec}P_i^F(t) + {}_{inv}^{vec}P_i^M(t).$$

Il totale dei pensionati d'invalidità/inabilità di età i all'anno t è:

$${}_{inv}P_i(t) = {}_{inv}^{nuo}P_i(t) + {}_{inv}^{vec}P_i(t).$$

Nel considerare l'ultimo gruppo di pensionati, cioè quelli indiretti e di reversibilità, al fine di semplificare il modello, si considerano solamente i coniugi superstiti (nell'ipotesi che non contraggano nuovo matrimonio), che sono sicuramente il gruppo più consistente tra gli aventi diritto²⁴, con le loro probabilità di sopravvivenza. Va sottolineato che le statistiche hanno da sempre dimostrato che la probabilità di sopravvivere di un vedovo è inferiore alla probabilità di sopravvive-

²⁴ Gli altri sono i figli (fino ad un'età fissata in relazione agli studi intrapresi), i genitori e i fratelli a carico del dante causa, con percentuali di accredito diverse.

re della popolazione maschile generale e che questo non vale per le donne (Coppini 1989). Recenti studi indicano, però, un inizio di cambiamento nelle probabilità al femminile, correlato probabilmente alla maggiore longevità delle donne: è chiamata “sindrome di Penelope”²⁵ ed è quel fenomeno che, legato presumibilmente a problemi di solitudine e tristezza nella vedovanza, comincia a produrre una variazione nelle probabilità di sopravvivenza delle vedove. Il fenomeno non è ancora consistente, ma ci si aspettano effetti degni di nota negli anni a venire.

Tornando alla formalizzazione si ottengono queste ultime voci pensionistiche.

Pensioni indirette maschi:

$${}_{ind}^{nuo}P_k^M(h,t) = \sum_{i=18}^{a-1} l_i^F(h,t-1)(1-\omega_i^F) {}_{k}^{ved}\theta_i^F \quad (1)$$

Pensioni indirette femmine:

$${}_{ind}^{nuo}P_k^F(h,t) = \sum_{i=18}^{a-1} l_i^M(h,t-1)(1-\omega_i^M) {}_{k}^{ved}\theta_i^M,$$

dove k è l'età del vedovo/a, ${}_{k}^{ved}\theta_i^F$ e ${}_{k}^{ved}\theta_i^M$ sono le probabilità che un'attiva/o di età i lasci un vedovo/a di età k .

Sommando per sesso:

$${}_{ind}^{nuo}P_k(h,t) = {}_{ind}^{nuo}P_k^F(h,t) + {}_{ind}^{nuo}P_k^M(h,t).$$

Sommando rispetto all'anzianità di servizio del dante causa e con il vincolo che questa deve essere ≥ 10 , risultando 0 per valori fino a 9, si ha:

$${}_{ind}^{nuo}P_k^F(t) = \sum_{h=1}^H {}_{ind}^{nuo}P_k^F(h,t), \quad {}_{ind}^{nuo}P_k^M(t) = \sum_{h=1}^H {}_{ind}^{nuo}P_k^M(h,t),$$

$$\text{da cui, } {}_{ind}^{nuo}P_k(t) = {}_{ind}^{nuo}P_k^F(t) + {}_{ind}^{nuo}P_k^M(t).$$

²⁵ “Donne rimaste spesso vedove, sole, malate di nostalgia del tempo passato, che non guariscono mai dal loro dolore fisico perché lo alimentano con il malessere psicologico”. La sindrome di Penelope riguarda ormai una donna ultrasessantacinquenne su cinque, secondo uno studio dell'università di Messina, presentato durante il Congresso nazionale dell'Associazione italiana di psicogeriatrica (Aip) ad aprile 2011.

Denotati con ${}^{ved}\omega_k^F$ e ${}^{ved}\omega_k^M$ le probabilità di sopravvivenza delle vedove e dei vedovi, i vecchi pensionati indiretti sono:

$$\begin{aligned} {}_{ind}^{vec}P_{k+1}^F(t+1) &= [{}_{ind}^{vec}P_k^F(t) + {}_{ind}^{nuo}P_k^F(t)] {}^{ved}\omega_k^F, \\ {}_{ind}^{vec}P_{k+1}^M(t+1) &= [{}_{ind}^{vec}P_k^M(t) + {}_{ind}^{nuo}P_k^M(t)] {}^{ved}\omega_k^M. \end{aligned}$$

Il totale dei vecchi pensionati indiretti è:

$${}_{ind}^{vec}P_k(t) = {}_{ind}^{vec}P_k^F(t) + {}_{ind}^{vec}P_k^M(t).$$

Il totale dei pensionati indiretti d'età k all'anno t è:

$${}_{ind}P_k(t) = {}_{ind}^{nuo}P_k(t) + {}_{ind}^{vec}P_k(t).$$

Per le pensioni di reversibilità, con riferimento alle ipotesi formulate per le indirette, abbiamo le nuove ed i nuovi:

$${}_{rev}^{nuo}P_k^F(h,t) = \sum_{i=a}^{\Omega-1} {}_{dir}P_i^M(h,t-1)(1 - \omega_i^M) {}^{ved}\theta_i^M,$$

$${}_{rev}^{nuo}P_k^M(h,t) = \sum_{i=a}^{\Omega-1} {}_{dir}P_i^F(h,t-1)(1 - \omega_i^F) {}^{ved}\theta_i^F.$$

Il totale dei nuovi è:

$${}_{rev}^{nuo}P_k(h,t) = {}_{rev}^{nuo}P_k^F(h,t) + {}_{rev}^{nuo}P_k^M(h,t).$$

Sommando rispetto all'anzianità di servizio del dante causa, fermo restando il vincolo dei 10 anni, si ha:

$${}_{rev}^{nuo}P_k^F(t) = \sum_{h=1}^H {}_{rev}^{nuo}P_k^F(h,t) \quad \text{e} \quad {}_{rev}^{nuo}P_k^M(t) = \sum_{h=1}^H {}_{rev}^{nuo}P_k^M(h,t), \quad \text{da cui}$$

$${}_{rev}^{nuo}P_k(t) = {}_{rev}^{nuo}P_k^F(t) + {}_{rev}^{nuo}P_k^M(t).$$

I vecchi pensionati di reversibilità, in modo ricorsivo, sono:

$$\begin{aligned} {}_{rev}^{vec}P_{k+1}^F(t+1) &= [{}_{rev}^{vec}P_k^F(t) + {}_{rev}^{nuo}P_k^F(t)] {}^{ved}\omega_k^F, \\ {}_{rev}^{vec}P_{k+1}^M(t+1) &= [{}_{rev}^{vec}P_k^M(t) + {}_{rev}^{nuo}P_k^M(t)] {}^{ved}\omega_k^M. \end{aligned}$$

Il totale dei vecchi è:

$${}_{rev}^{vec}P_k(t) = {}_{rev}^{vec}P_k^F(t) + {}_{rev}^{vec}P_k^M(t).$$

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

Il totale dei pensionati di reversibilità di età k all'anno t è dunque dato da:

$${}_{rev}P_k(t) = {}_{rev}^{nuo}P_k(t) + {}_{rev}^{vec}P_k(t).$$

Il totale dei pensionati, per ogni età k , è la somma di tutti i *caseload* considerati:

$$P(t) = {}_{dir}P_i(t) + {}_{inv}P_i(t) + {}_{ind}P_k(t) + {}_{rev}P_k(t).$$

4. BASI TECNICHE ECONOMICHE E FINANZIARIE: ONERI E PRESTAZIONI

Si vogliono qui ricostruire gli importi delle pensioni e dei salari, in funzione delle nuove regole indicate nella Cazzola - Treu per formalizzare il tasso di sostituzione che ne deriva, evidenziando quali sono le variabili sulle quali si può pensare di intervenire se si considerano i paletti indicati dalla proposta stessa che, come detto, afferma che il tasso di sostituzione non deve scendere al di sotto della soglia del 60%. Fatto questo peraltro auspicabile poiché, se dovesse decollare il secondo pilastro del nostro sistema previdenziale, per il quale si ipotizza una soglia minima del 16% di tasso di sostituzione, il pensionato si troverebbe ad avere un rateo di pensione vicino all'80% del suo ultimo salario e quindi con garanzie simili a quelle ante Dini, per le quali si arrivava a percentuali anche non lontane dal 90%. La realtà è che ad oggi a regime della 335/95 le ipotesi sui tassi di sostituzione sono drammatiche²⁶ e faranno dei futuri pensionati i veri poveri di questo Paese.

Indichiamo con $\bar{R}_i(h, t)$ il salario lordo medio di un individuo d'età i nell'anno t , con h anni d'anzianità di servizio, con $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 = 26\%$ l'aliquota contributiva corrispondente all'anno t , dove α_0 è la parte spettante al lavoratore ed è prevista pari ad $1/3$ e α_1 è quella spettante al datore di lavoro ed è prevista pari a $2/3$. Nella

²⁶ Cfr. [16]

formalizzazione si lascia l'espressione generica del dato costante, ma ovviamente si tiene conto dell'indicazione legislativa. L'ammontare totale delle retribuzioni a t è:

$$T(t) = \sum_{i,h} [l_i^F(h,t) + l_i^M(h,t)] \bar{R}_i(h,t),$$

da cui è possibile calcolare l'ammontare totale dei contributi $C(t) = \alpha T(t)$, cioè:

$$C(t) = \alpha \sum_{i,h} [l_i^F(h,t) + l_i^M(h,t)] \bar{R}_i(h,t)$$

Ora, indicando con $c_i(t)$ i coefficienti di trasformazione (che si riportano in appendice) della legge Dini per l'età i e l'anno t , che a seguito della Riforma Tremonti del luglio 2010²⁷ sono aggiornati ogni tre anni²⁸, e con r_k il tasso annuo di capitalizzazione calcolato come media geometrica quinquennale del PIL nominale all'anno k , la prestazione media di un pensionato che va in quiescenza all'anno t , dopo h anni di anzianità di servizio e zero anni di anzianità pensionistica, nell'ipotesi che i contributi siano valutati alla fine dell'anno e le pensioni siano pagate all'inizio dell'anno, è:

per le pensioni dirette

$${}_{dir}^0 \bar{\pi}_i(h,t) = \alpha \sum_{0 < J \leq h} c_i(t) \bar{R}_{i-J}(h-J, t-J) \prod_{t-J < k < t} (1 + r_k),$$

per le pensioni d'invalidità/inabilità

$${}_{inv}^0 \bar{\pi}_i(h,t) = \alpha \sum_{0 < J \leq h} c_i(t) \bar{R}_{i-J}(h-J, t-J) \prod_{t-J < k < t} (1 + r_k),$$

per le pensioni indirette

²⁷ Decreto legge 31 maggio 2010 n. 78, convertito in Legge 30 luglio 2010 n. 122, art. 12.

²⁸ L'ultimo aggiornamento è di gennaio 2010, quindi disattendendo completamente l'indicazione dei 10 anni della 335/95, ed il calcolo è stato effettuato prendendo a riferimento le aspettative di vita dell'anno 2006. I nuovi coefficienti incidono sulla riduzione del tasso di sostituzione nella misura di 8 punti percentuali.

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

$${}_{ind}^0\bar{\pi}_i(h,t) = 0,6\alpha \sum_{0 < J \leq h} c_i(t) \bar{R}_{i-J}(h-J, t-J) \prod_{t-J < k < t} (1+r_k)$$

(dove $\bar{R}_{i-J}(h-J, t-J)$ è la retribuzione media del dante causa),

per le pensioni di reversibilità

$${}_{rev}^0\bar{\pi}_i(h,t) = 0,6 {}_{dir}^v\bar{\pi}_i(h,t).$$

Se r'_k è il tasso di rivalutazione delle pensioni all'anno k , v ($v \geq 0$) il numero degli anni di pensione, si ha:

dirette

$${}_{dir}^v\bar{\pi}_i(h,t) = \left(\alpha \sum_{0 < J \leq h} c_{i-v}(t) \bar{R}_{i-v-J}(h-J, t-J) \prod_{t-J < k < t} (1+r_k) \right) \prod_{t-v < k \leq t} (1+r'_k),$$

invalidità/inabilità

$${}_{inv}^v\bar{\pi}_i(h,t) = \left(\alpha \sum_{0 < J \leq h} c_{i-v}(t) \bar{R}_{i-v-J}(h-J, t-J) \prod_{t-J < k < t} (1+r_k) \right) \prod_{t-v < k \leq t} (1+r'_k),$$

indirette

$${}_{ind}^v\bar{\pi}_i(h,t) = \left(0,6\alpha \sum_{0 < J \leq h} c_{i-v}(t) \bar{R}_{i-v-J}(h-J, t-J) \prod_{t-J < k < t} (1+r_k) \right) \prod_{t-v < k \leq t} (1+r'_k),$$

reversibilità

$${}_{rev}^v\bar{\pi}_i(h,t) = {}_{rev}^0\bar{\pi}_i(h,t) \prod_{t-v < k \leq t} (1+r'_k).$$

Il numero dei pensionati femmine e maschi con i parametri sopra definiti è:

dirette

$${}_{dir}^vP_i^F(h,t) = {}_{dir}^0P_{i-v}^F(h,t-v) \prod_{j=1-v}^{i-1} \omega_j^F,$$

$${}_{dir}^vP_i^M(h,t) = {}_{dir}^0P_{i-v}^M(h,t-v) \prod_{j=1-v}^{i-1} \omega_j^M,$$

invalidità/inabilità

$$\begin{aligned} {}^v P_i^F(h, t) &= {}^0 P_{i-v}^F(h, t - v) \prod_{j=1-v}^{i-1} {}^{inv} \omega_j^F \\ {}^v P_i^M(h, t) &= {}^0 P_{i-v}^M(h, t - v) \prod_{j=1-v}^{i-1} {}^{inv} \omega_j^M, \end{aligned}$$

indirette

$$\begin{aligned} {}^v P_i^F(h, t) &= {}^0 P_{i-v}^F(h, t - v) \prod_{j=1-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^F, \\ {}^v P_i^M(h, t) &= {}^0 P_{i-v}^M(h, t - v) \prod_{j=1-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^M, \end{aligned}$$

reversibilità

$$\begin{aligned} {}^v P_i^F(h, t) &= {}^0 P_{i-v}^F(h, t - v) \prod_{j=1-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^F, \\ {}^v P_i^M(h, t) &= {}^0 P_{i-v}^M(h, t - v) \prod_{j=1-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^M. \end{aligned}$$

L'ammontare totale delle pensioni dirette, d'invalidità/inabilità, indirette e di reversibilità a t è:

$$\begin{aligned} {}^{dir} \pi_i(h, t) &= {}^{dir} \bar{\pi}_i(h, t) \left({}^{dir} P_i^F(h, t) + {}^{dir} P_i^M(h, t) \right), \\ {}^{inv} \pi_i(h, t) &= {}^{inv} \bar{\pi}_i(h, t) \left({}^{inv} P_i^F(h, t) + {}^{inv} P_i^M(h, t) \right), \\ {}^{ind} \pi_i(h, t) &= {}^{ind} \bar{\pi}_i(h, t) \left({}^{ind} P_i^F(h, t) + {}^{ind} P_i^M(h, t) \right), \\ {}^{rev} \pi_i(h, t) &= {}^{rev} \bar{\pi}_i(h, t) \left({}^{rev} P_i^F(h, t) + {}^{rev} P_i^M(h, t) \right). \end{aligned}$$

Con r_k, r'_k indipendenti da k , $\bar{R}_i(h, t) = d_{i,h}(1+q)^t$, sommando rispetto all'età, dove la massima raggiungibile è Ω , all'anzianità in pensione, utilizzando 58 o 59 anni secondo la categoria di lavoratori, come indicato precedentemente, e all'anzianità in servizio, ipotizzando come detto l'obbligo scolastico fino a 18 anni, l'età minima di ingresso nel mondo del lavoro 18 (che come detto può essere considerata di fatto 22) e indicando con a l'età flessibile di pensionamento prevista si ha:

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE
QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

$$\begin{aligned} \pi_{dir}(t) &= \alpha \sum_{i=58}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^{i-58} \sum_{h=1}^H \left[(1+r')^v \sum_{0 < J \leq h} c_i(t) d_{i-v-J,h} (1+q)^{t-J} (1+r)^{J-1} \right] \left[{}^0P_{i-v}^F(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^F + {}^0P_{i-v}^M(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^M \right] \\ \pi_{inv}(t) &= \alpha \sum_{i=18}^{a-1} \sum_{v=0}^{i-18} \sum_{h=1}^H \left[(1+r')^v \sum_{0 < J \leq h} c_i(t) d_{i-v-J,h} (1+q)^{t-J} (1+r)^{J-1} \right] \left[{}^0P_{i-v}^F(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{invF} + {}^0P_{i-v}^M(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{invM} \right] \\ \pi_{ind}(t) &= \alpha \sum_{i=18}^{a-1} \sum_{v=0}^{i-18} \sum_{h=1}^H \left[(1+r')^v \sum_{0 < J \leq h} c_i(t) d_{i-v-J,h} (1+q)^{t-J} (1+r)^{J-1} \right] \left[{}^0P_{i-v}^F(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{vedF} + {}^0P_{i-v}^M(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{vedM} \right] \\ \pi_{rev}(t) &= \alpha \sum_{i=58}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^{i-58} \sum_{h=1}^H \left[{}^0\bar{\pi}_i(h, t) (1+r')^v \right] \left[{}^0P_{i-v}^F(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{vedF} + {}^0P_{i-v}^M(h, t-v) \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{vedM} \right] \end{aligned}$$

L'ammontare totale delle pensioni contributive all'anno t è:

$$\pi_{con}(t) = \pi_{dir}(t) + \pi_{inv}(t) + \pi_{ind}(t) + \pi_{rev}(t).$$

A questo punto è necessario inserire la quota fissa di pensione $\pi_{fix}(t)$, di cui alla proposta Cazzola - Treu, che si finanzia tramite la fiscalità generale.

Il numero dei pensionati femmine e maschi, di età i ed anzianità di pensionamento v , per tale quota è:

$$\begin{aligned} {}^vP_i^F(t) &= \sum_{h=10}^H ({}^vP_{i-v}^{dirF}(h, t) + {}^vP_{i-v}^{invF}(h, t) + {}^vP_{i-v}^{indF}(h, t) + {}^vP_{i-v}^{revF}(h, t)), \\ {}^vP_i^M(t) &= \sum_{h=10}^H ({}^vP_{i-v}^{dirM}(h, t) + {}^vP_{i-v}^{invM}(h, t) + {}^vP_{i-v}^{indM}(h, t) + {}^vP_{i-v}^{revM}(h, t)) \end{aligned}$$

Definiamo $AS(t)$ l'importo dell'assegno sociale dell'anno t (per $t = 0, 1, 2, \dots$), fissiamo t_0 come anno convenzionale di riferimento, δ il tasso di rivalutazione dell'assegno sociale stesso (che è stabilito di anno in anno).

Sommando rispetto all'anzianità in pensione, dove l'età massima raggiungibile è Ω , con sempre la stessa clausola 58 o 59, e ricordando

il vincolo $h \geq 10$ per maturare il diritto, si ottiene la pensione in quota fissa:

$$\pi_{fix}(t) = AS(t_0) \prod_{z=t_0+1}^t (1 + \delta_z) \sum_{\nu=0}^{\Omega-58} ({}^{\nu}P_i^F(t) + {}^{\nu}P_i^M(t)) = AS(t) \sum_{\nu=0}^{\Omega-58} ({}^{\nu}P_i^F(t) + {}^{\nu}P_i^M(t))$$

L'ammontare totale della pensione, somma della quota contributiva con la quota fissa, è dunque:

$$\pi(t) = \pi_{con}(t) + \pi_{fix}(t).$$

5. TASSO DI SOSTITUZIONE IN FUNZIONE DEI PARAMETRI DEL MODELLO

Ricordando che il sistema finanziario di gestione è a ripartizione ed il limite del rapporto tra tutte le voci pensionistiche, in quota contributiva ed in quota fissa, e l'ammontare totale dei salari netti ricevuti, $(1 - \alpha_0)T$, è un valore A dato, denominato appunto tasso di sostituzione, cioè, nell'equilibrio demografico:

$$\frac{1}{(1 - \alpha_0)} \left(\frac{\pi_{con} + \pi_{fix}}{T} \right)_{\infty} = A, \quad \text{che in modo compatto si può indicare}$$

$$\frac{1}{(1 - \alpha_0)} \left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty} = A, \quad (2)$$

$$\text{dove } \left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi(t)}{T(t)}.$$

Ricordando che il tasso di sostituzione si vuole attestato per legge ad almeno il 60%, che la componente α_0 dell'aliquota contributiva è pari al 17,34%, sempre per la proposta di legge, si vuole dimostrare

l'esistenza del limite indicato, dimostrando l'esistenza di tutti i limiti componenti.

Trasformiamo il rapporto $\left(\frac{\pi}{T}\right)_{\infty}$ per l'equilibrio demografico, dividendo per λ'_0 , il che ci consente di calcolare il limite, di cui è garantita l'esistenza, applicando il Teorema 1, nel seguente modo:

$$\left(\frac{\pi}{T}\right)_{\infty} = \frac{\left(\frac{\pi(t)}{\lambda'_0}\right)_{\infty}}{\left(\frac{T(t)}{\lambda'_0}\right)_{\infty}} = A(1 - \alpha_0), \text{ con semplici trasformazioni, utiliz-}$$

zando la (2):

$$\left(\frac{\pi(t)}{\lambda'_0}\right)_{\infty} = A(1 - \alpha_0) \left(\frac{T(t)}{\lambda'_0}\right)_{\infty}.$$

Per poter applicare il teorema è necessario esprimere il numero dei pensionati, in precedenza esplicitati, in funzione degli attivi.

Supponiamo che, per ogni $18 < i < a$, il tasso di prima occupazione femminile $\tau_i^F(t)$ e maschile $\tau_i^M(t)$ siano costanti nel tempo. Allora, per tutti gli $18 < i \leq 58$, $10 \leq h \leq i - 18$ e t sufficientemente grande, applicando il modello di Lesile, si ha:

$$l_i^F(h, t) = \tau_{i-h}^F x_{i-h}^F(t-h) \omega_{i-h}^F \omega_{i-h+1}^F \cdots \omega_{i-1}^F = \tau_{i-h}^F x_i^F(t) \quad (3)$$

$$l_i^M(h, t) = \tau_{i-h}^M x_{i-h}^M(t-h) \omega_{i-h}^M \omega_{i-h+1}^M \cdots \omega_{i-1}^M = \tau_{i-h}^M x_i^M(t). \quad (4)$$

Per $18 < i \leq 58$, $10 \leq h \leq i - 18$, applicando il limite del teorema si ha per femmine e maschi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{l_i^F(h, t)}{\lambda_0^t} = \tau_{i-h}^F s x_i^{0F}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{l_i^M(h, t)}{\lambda_0^t} = \tau_{i-h}^M s x_i^{0M}.$$

Con le stesse ipotesi $58 \leq i \leq a$, $35 \leq h \leq i - 18$, supponendo che la propensione al pensionamento $\gamma_i(h, t)$ sia costante nel tempo, $\gamma_{i,h}$ ²⁹ e procedendo come per la (3) e la (4), un calcolo banale dimostra che con appropriate costanti $g_{i,h}^F$, che dipendono dai parametri demografici, sono definite cioè in termini dei parametri del modello τ_{i-h}^F e $\gamma_{i,h}$, si ha:

$l_i^F(h, t) = g_{i,h}^F x_i^F(t)$ e $l_i^M(h, t) = g_{i,h}^M x_i^M(t)$, cioè la proporzionalità all'autovettore che implica, partendo dallo stato iniziale, di cui al Teorema 1, rispettivamente per femmine e maschi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{l_i^F(h, t)}{\lambda_0^t} = g_{i,h}^F s x_i^{0F},$$

(5)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{l_i^M(h, t)}{\lambda_0^t} = g_{i,h}^M s x_i^{0M}.$$

(6)

Unificando la notazione per tutte le classi d'età e d'anzianità, cioè per tutti gli $18 < i \leq a$ e

$10 \leq h \leq i - 18$, indicando $g_{i,h}^F := \tau_{i-h}^F$ e $g_{i,h}^M := \tau_{i-h}^M$, con la notazione precedente,

$${}_{dir}^0 P_i^F(h, t) = l_i^F(h, t) \omega_i^F - l_{i+1}^F(h+1, t+1),$$

(7)

e applicando la (3) e la (4) si ha rispettivamente per femmine e maschi:

²⁹ Questa dovrebbe essere una delle variabili chiave sulla quale intervenire.

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE
QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

$$\begin{aligned}
 {}^0_{dir}P_i^F(h, t) &= g_{i,h}^F x_i^F(t) \omega_i^F - g_{i+1,h+1}^F x_{i+1}^F(t+1) \\
 &= g_{i,h}^F x_i^F(t) \omega_i^F - g_{i+1,h+1}^F \omega_i^F x_i^F(t) \\
 &= (g_{i,h}^F - g_{i+1,h+1}^F) \omega_i^F x_i^F(t). \\
 {}^0_{dir}P_i^M(h, t) &= g_{i,h}^M x_i^M(t) \omega_i^M - g_{i+1,h+1}^M x_{i+1}^M(t+1) \\
 &= g_{i,h}^M x_i^M(t) \omega_i^M - g_{i+1,h+1}^M \omega_i^M x_i^M(t) \\
 &= (g_{i,h}^M - g_{i+1,h+1}^M) \omega_i^M x_i^M(t).
 \end{aligned}$$

Indicando con $\bar{g}_{i,h}^F := (g_{i,h}^F - g_{i+1,h+1}^F) \omega_i^F$ e $\bar{g}_{i,h}^M := (g_{i,h}^M - g_{i+1,h+1}^M) \omega_i^M$ i limiti diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{dir}P_i^F(h, t)}{\lambda_0^t} &= \bar{g}_{i,h}^F x_i^{0F} \\
 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{dir}P_i^M(h, t)}{\lambda_0^t} &= \bar{g}_{i,h}^M x_i^{0M}.
 \end{aligned}$$

Conseguentemente, considerando che ν anni fa i pensionati erano nuovi attivi, otteniamo rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{dir}P_{i-\nu}^F(h, t - \nu)}{\lambda_0^t} &= \frac{1}{\lambda_0^\nu} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{dir}P_{i-\nu}^F(h, t - \nu)}{\lambda_0^{t-\nu}} \bar{g}_{i,h}^F x_i^{0F} = \frac{1}{\lambda_0^\nu} \bar{g}_{i,h}^F x_i^{0F} \\
 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{dir}P_{i-\nu}^M(h, t - \nu)}{\lambda_0^t} &= \frac{1}{\lambda_0^\nu} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{dir}P_{i-\nu}^M(h, t - \nu)}{\lambda_0^{t-\nu}} \bar{g}_{i,h}^M x_i^{0M} = \frac{1}{\lambda_0^\nu} \bar{g}_{i,h}^M x_i^{0M}.
 \end{aligned}$$

Passando al limite di $\frac{\pi(t)}{T(t)}$ per le pensioni dirette, utilizzando la (5) e la (6) per il denominatore, considerando, per semplicità, i coefficienti

ti di trasformazione indipendenti dall'età, e supponendo che esiste il limite $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_0$, otteniamo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_{dir}(t)}{T(t)} = \alpha c_0 \frac{\sum_{i=58}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^i \sum_{h=10}^H \left[(1+r')^v \sum_{0 < J \leq h} d_{i-v-J,h} \frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^J} \right] \left[\frac{1}{\lambda_0^v} \bar{g}_{i-v,h}^F x_i^F \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^F + \frac{1}{\lambda_0^v} \bar{g}_{i-v,h}^M x_i^M \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^M \right]}{\sum_{i,h} [g_{i,h}^F s x_i^{0F} + g_{i,h}^M s x_i^{0M}] d_{ih}}$$

Ora è necessario esplicitare i pensionati d'invalidità/inabilità, femmine e maschi, in funzione degli attivi, per calcolare il limite di questa categoria di pensioni:

$${}_{inv}P_{i+1}^F(h, t+1) = l_i^F(h, t) \omega_i^F \psi_i^F, \quad {}_{inv}P_{i+1}^M(h, t+1) = l_i^M(h, t) \omega_i^M \psi_i^M.$$

Per tutti gli $18 < i \leq a$, $10 \leq h \leq i - 18$ e t sufficientemente grande, sempre dalle formule (3) e (4) abbiamo rispettivamente per femmine e maschi:

$$\begin{aligned} {}_{inv}P_i^F(h, t) &= l_i^F(h, t) \omega_i^F \psi_i^F = \tau_{i-h}^F \psi_i^F x_i^F(t), \\ {}_{inv}P_i^M(h, t) &= l_i^M(h, t) \omega_i^M \psi_i^M = \tau_{i-h}^M \psi_i^M x_i^M(t). \end{aligned}$$

Applicando il Teorema 1, con ${}_{inv}g_{i,h}^F$ e ${}_{inv}g_{i,h}^M$ parametri demografici appropriati, si ha per femmine e maschi:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{inv}P_i^F(h, t)}{\lambda_0^t} &= \tau_{i-h}^F \psi_i^F s x_i^{0F} = {}_{inv}g_{i,h}^F x_i^{0F}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{inv}P_i^M(h, t)}{\lambda_0^t} &= \tau_{i-h}^M \psi_i^M s x_i^{0M} = {}_{inv}g_{i,h}^M x_i^{0M}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{inv}P_{i-v}^F(h, t-v)}{\lambda_0^t} &= \frac{1}{\lambda_0^v} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{inv}P_{i-v}^F(h, t-v)}{\lambda_0^{t-v}} = \frac{1}{\lambda_0^v} {}_{inv}g_{i,h}^F x_i^{0F}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{inv}P_{i-v}^M(h, t-v)}{\lambda_0^t} &= \frac{1}{\lambda_0^v} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{inv}P_{i-v}^M(h, t-v)}{\lambda_0^{t-v}} = \frac{1}{\lambda_0^v} {}_{inv}g_{i,h}^M x_i^{0M}. \end{aligned}$$

Passando al limite di $\frac{\pi_{inv}(t)}{T(t)}$ per le pensioni d'invalidità/inabilità, così come fatto per le dirette si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_{inv}(t)}{T(t)} = \frac{\sum_{i=18}^{a-1} \sum_{v=0}^{i-58} \sum_{h=10}^H \left[(1+r')^v \sum_{0 < J \leq h} d_{i-v-J,h} \frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^J} \right] \left[\frac{1}{\lambda_0^{inv}} g_{i-v,h}^F x_i^F \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{inv} \omega_j^F + \frac{1}{\lambda_0^{inv}} g_{i-v,h}^M x_i^M \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{inv} \omega_j^M \right]}{\sum_{i,h} [g_{i,h}^F s x_i^{0F} + g_{i,h}^M s x_i^{0M}] d_{ih}}$$

Per le pensioni indirette, riferendoci alla (1), otteniamo per entrambi sessi, il numero dei pensionati indiretti in funzione degli attivi:

$$\begin{aligned} {}^0_{ind}P_k^F(h,t) &= \sum_{i=18}^{a-1} l_i^M(h,t-1)(1-\omega_i^M)^{ved}_k \theta_i^M = \sum_{i=18}^{a-1} \tau_{i-h}^M \text{ ved}_k \theta_i^M x_i^M(t), \\ {}^0_{ind}P_k^M(h,t) &= \sum_{i=18}^{a-1} l_i^F(h,t-1)(1-\omega_i^F)^{ved}_k \theta_i^F = \sum_{i=18}^{a-1} \tau_{i-h}^F \text{ ved}_k \theta_i^F x_i^F(t). \end{aligned}$$

Per le pensioni indirette, con ragionamento analogo al precedente, applicando il Teorema 1, con appropriati parametri demografici ${}^i_{ind}g_{\mu,h}^F$, ${}^i_{ind}g_{\mu,h}^M$, dove i diventa l'età del vedovo o della vedova percettore di pensione indiretta e μ è l'età del dante causa al momento della morte da attivo, si ottiene per i due sessi rispettivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{ind}P_{i-v}^F(h,t-v)}{\lambda_0^t} &= \frac{1}{\lambda_0^v} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{ind}P_{i-v}^F(h,t-v)}{\lambda_0^{t-v}} = \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} {}^i_{ind}g_{\mu,h}^M x_{\mu i}^{0M}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{ind}P_{i-v}^M(h,t-v)}{\lambda_0^t} &= \frac{1}{\lambda_0^v} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0_{ind}P_{i-v}^M(h,t-v)}{\lambda_0^{t-v}} = \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} {}^i_{ind}g_{\mu,h}^F x_{\mu i}^{0F}. \end{aligned}$$

Passando al limite di $\frac{\pi_{ind}(t)}{T(t)}$, pensioni indirette rispetto alle retri-

buzioni, così come fatto per le precedenti prestazioni si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_{ind}(t)}{T(t)} = \frac{\sum_{i=18}^{a-1} \sum_{v=0}^{58} \sum_{h=1}^H \left[(1+r')^v \sum_{0 < J \leq h} d_{i-v-J,h} \frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^J} \right] \left[\frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} g_{\mu,h}^M x_{\mu}^{0M} \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{ved} + \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} g_{\mu,h}^F x_{\mu}^{0F} \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^{ved} \right]}{\sum_{i,h} [g_{i,h}^F x_i^{0F} + g_{i,h}^M x_i^{0M}] d_{ih}}$$

Per poter calcolare il limite del rapporto tra pensioni di reversibilità e retribuzioni è necessario esplicitare i pensionati di reversibilità, cioè le vedove e i vedovi in funzione degli attivi. Indicando con v l'anzianità di pensionamento dei vedovi e delle vedove e con i la loro età (ipotizzando non si contragga matrimonio prima dei $\beta \geq 18$ anni)³⁰, sostituendo la (7), si ha:

$${}_{rev}^0 P_k^F(h,t) = \sum_{i=\beta}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^{\Omega-1-\beta} {}_d^v P_i^M(h,t-1)(1-\omega_i^M)^{ved} \theta_i^M = \sum_{i=\beta}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^{\Omega-1-\beta} [l_{i-v-1}^F(h,t-v-1)\omega_{i-v-1}^F - l_{i-v}^F(h+1,t-v)](1-\omega_i^M)^{ved} \theta_i^M.$$

Rispetto alla problematica di cui alla nota 29, è' necessario sottolineare che nella formalizzazione della pensione di reversibilità non si tiene conto dell'ipotesi Tremonti, prevista nella manovra economica di giugno 2011, secondo la quale: "...con effetto sulle pensioni decorrenti dal 1° gennaio 2012 l'aliquota percentuale della pensione a favore dei superstiti di assicurato e pensionato nell'ambito del regime dell'assicurazione generale obbligatoria e delle forme esclusive o sostitutive di detto regime nonché della gestione separata di cui all'articolo 2, comma 26, della legge 8 agosto 1995, n. 335 è ridotta,

³⁰ In questo modo si palesano anche le posizioni di reversibilità legate al cosiddetto fenomeno delle badanti. Accade sempre più spesso che la reversibilità sia riconosciuta a persone, prevalentemente, se non esclusivamente donne, anche molto giovani che hanno contratto matrimonio con il coniuge nei suoi ultimi mesi di vita o addirittura in punto di morte. Questo comporta un beneficio pensionistico per un numero di anni non previsto dalle basi tecniche, con forte aggravio per il sistema previdenziale. Nel 2008 le pensioni di reversibilità devolute a donne sotto i 60 anni sono state quasi il 10% del totale e di queste il 4,1% riguarda vedove con età inferiori ai 50 anni.

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

nei casi in cui il matrimonio con il dante causa sia stato contratto ad età del medesimo superiori a settanta anni e la differenza di età tra i coniugi sia superiore a venti anni, del 10 per cento in ragione di ogni anno di matrimonio con il dante causa mancante rispetto al numero di 10...”

Tornando alla formalizzazione e applicando la (3) e la (4) otteniamo per i due sessi:

$${}_{rev}^0 P_{k-v}^F(h, t-v) = \sum_{i=58}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^{\Omega-1-\beta} (g_{i-v,h}^M - g_{i-v+1,h+1}^M) \omega_{i-v}^M x_{i-v}^M(t) (1 - \omega_{i-v}^M)^{ved} \theta_{i-v}^M,$$

$${}_{rev}^0 P_{k-v}^M(h, t-v) = \sum_{i=58}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^{\Omega-1-\beta} (g_{i-v,h}^F - g_{i-v+1,h+1}^F) \omega_{i-v}^F x_{i-v}^F(t) (1 - \omega_{i-v}^F)^{ved} \theta_{i-v}^F.$$

Per la pensione di reversibilità, con un ragionamento analogo al precedente, applicando il Teorema 1, con appropriati parametri demografici ${}_{rev}^i g_{\mu,h}^F$, ${}_{rev}^i g_{\mu,h}^M$, dove i diventa l'età del vedovo o della vedova percettore di pensione di reversibilità e μ è l'età del dante causa al momento della morte da pensionato, si ottiene per i due sessi rispettivamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{rev}^0 P_{i-v}^F(h, t-v)}{\lambda_0^t} = \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} {}_{rev}^i g_{\mu,h}^M x_{\mu}^{0M},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}_{rev}^0 P_{i-v}^M(h, t-v)}{\lambda_0^t} = \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} {}_{rev}^i g_{\mu,h}^F x_{\mu}^{0F}.$$

Passando al limite di $\frac{\pi_{rev}(t)}{T(t)}$, pensioni di reversibilità su retribuzioni, così come fatto per le precedenti prestazioni si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_{rev}(t)}{T(t)} = \frac{\sum_{i=18}^{\Omega-1} \sum_{v=0}^H \sum_{h=10}^H \left[(1+r')^v \sum_{0 < J \leq h} d_{i-v-J,h} \frac{(1+r)^{J-1}}{(1+q)^J} \right] \left[\frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{\Omega-1} {}^i g_{\mu,h}^M x_{\mu}^{0M} \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^F + \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{\Omega-1} {}^i g_{\mu,h}^F x_{\mu}^{0F} \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^M \right]}{\sum_{i,h} [g_{i,h}^F s x_i^{0F} + g_{i,h}^M s x_i^{0M}] d_{ih}}$$

Resta ora da formalizzare il limite del rapporto tra quota fissa di pensione e retribuzione.

Indichiamo i limiti precedentemente calcolati dei pensionati, di tutte le categorie, rispetto alla popolazione attiva, in funzione del teorema, con una notazione semplificatrice dal punto di vista formale, nel seguente modo:

$$LimDir : \left[\frac{1}{\lambda_0^v} \bar{g}_{i-v,h}^F x_i^F \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^F + \frac{1}{\lambda_0^v} \bar{g}_{i-v,h}^M x_i^M \prod_{j=i-v}^{i-1} \omega_j^M \right]$$

$$LimInv : \left[\frac{1}{\lambda_0^v} {}^{inv} g_{i-v,h}^F x_i^F \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{inv} \omega_j^F + \frac{1}{\lambda_0^v} {}^{inv} g_{i-v,h}^M x_i^M \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{inv} \omega_j^M \right]$$

$$LimInd : \left[\frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} {}^i g_{\mu,h}^M x_{\mu}^{0M} \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^F + \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{a-1} {}^i g_{\mu,h}^F x_{\mu}^{0F} \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^M \right]$$

$$Lim Rev : \left[\frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{\Omega-1} {}^i g_{\mu,h}^M x_{\mu}^{0M} \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^F + \frac{1}{\lambda_0^v} \sum_{\mu=18}^{\Omega-1} {}^i g_{\mu,h}^F x_{\mu}^{0F} \prod_{j=i-v}^{i-1} {}^{ved} \omega_j^M \right]$$

Quindi il limite cercato risulta essere:

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_{fix}(t)}{T(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AS(t) \sum_{v=0}^{\Omega-58} ({}^v P_i^F(t) + {}^v P_i^M(t))}{\sum_{i,h} [g_{i,h}^F s x_i^{0F} + g_{i,h}^M s x_i^{0M}] d_{ih}} = \\ &= \frac{AS(t)(LimDir + LimInv + LimInd + LimRev)}{\sum_{i,h} [g_{i,h}^F s x_i^{0F} + g_{i,h}^M s x_i^{0M}] d_{ih}} \end{aligned}$$

A questo punto è possibile formalizzare l'espressione del tasso di sostituzione considerando tutte le possibili componenti pensionistiche, sia per la quota contributiva che per quella fissa.

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty} = \left(\frac{\pi_{dir}}{T} \right)_{\infty} + \left(\frac{\pi_{inv}}{T} \right)_{\infty} + \left(\frac{\pi_{ind}}{T} \right)_{\infty} + \left(\frac{\pi_{rev}}{T} \right)_{\infty} + \left(\frac{\pi_{fix}}{T\alpha} \right)_{\infty}.$$

Ponendo $B = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty}$ è possibile riscrivere l'equazione (2)

$$\frac{1}{(1-\alpha_0)} \left(\frac{\pi}{T} \right)_{\infty} = A \quad \text{che, con una banale sostituzione diventa}$$

$$B = \frac{1-\alpha_0}{\alpha} A.$$

Nel secondo membro tutti i dati sono fissi, proprio perché previsti dal disegno di legge. A è il tasso di sostituzione nell'ipotesi che sia raggiunto l'equilibrio demografico. Se A è noto a priori, perché si vuole si attesti almeno al 60%, l'aliquota contributiva è anch'essa fissata, le quote di pensione sono due, finanziate rispettivamente dai contributi e dalla fiscalità generale, è sulle variabili componenti che bisogna dare indicazioni. Cioè fissato il 60% come è possibile lavorare il dato età di pensionamento ed anzianità contributiva?

Questa formalizzazione è ovviamente su base collettiva e non individuale, facendo riferimento al Teorema 1 e quindi all'equilibrio de-

mografico asintotico di tutta la popolazione, ma può riferirsi anche a specifiche classi di attivi e pensionati.

L'innalzamento dell'età pensionabile e dell'anzianità contributiva, divenuti ormai inevitabili, possono essere, attraverso tale formalizzazione, concretamente misurati. Del resto è nel disegno di legge, oggetto di questo lavoro, che si parla esplicitamente di un "piano nazionale per il prolungamento della vita attiva".

CONCLUSIONI

Scopo di questo lavoro è dunque vedere le reali conseguenze tecniche dell'applicazione della proposta di legge Cazzola - Treu. Alla fase di formalizzazione deve ora seguire quella di simulazione con i dati effettivi e con differenziate ipotesi di variazione dell'età pensionabile e dell'anzianità contributiva. Non sono peraltro da escludere interventi sulle quote età/anzianità: nel lavoro si è lasciato 58 e 59 come età minima per l'ingresso in quiescenza e 35 come dato minimo di anzianità contributiva per usufruire del sistema a quote. E' banale l'eventuale intervento di parametrizzazione.

Dovendo mantenere fisse le indicazioni su tasso di sostituzione ed aliquota contributiva ci appare scontata la preferibilità di scelta tra un'applicazione in silico piuttosto che in vivo. Il ragionamento tecnico deve essere considerato un obbligo.

Se il mantra pensionistico è, come deve essere, *adeguatezza – adeguatezza – adeguatezza*, e quindi non si deve e non si può rinunciare alla soglia minima del 60%, si deve sapere come raggiungerla, si debbono conoscere con esattezza i sacrifici che ci attendono, deve essere chiaro nel dettaglio il quadro complessivo politico, economico, tecnico. E' necessario pianificare dunque una strategia che parta da basi tecnico attuariali rigorose, che non veda la previdenza come una monade isolata, che consideri per esempio la non efficienza del mercato del lavoro un elemento fondante del sistema pensionistico e che fotografi la situazione demografica presente e futura per quello che è, senza pericolose sottovalutazioni. Non va poi trascurata l'importante componente della popolazione immigrata, anche in termini di stima rispetto alle reali necessità: ad oggi gli stranieri rappresentano quasi il

13% degli assicurati Inps ed il 2,2% dei pensionati. Non essendo possibile coprire il buco provocato dalle mancate nascite, abbiamo la assoluta necessità di un contingente regolare annuo di immigrati inserito a pieno titolo nel mondo del lavoro.

Lo strumento decisionale, costruito sulla base del teorema dell'equilibrio asintotico, è collaudato e tecnicamente affidabile; la fase di simulazione informatica ci consentirà una riflessione e presumibilmente fornirà l'indicazione della necessità di correttivi sui paletti fissati, ma è imprescindibile.

A tutto questo si affianca ovviamente il tema della sostenibilità, che non è filosofia ma tecnica, e che non può essere disatteso tanto quanto quello dell'adeguatezza.

BIBLIOGRAFIA

1. Alho J.M., Spencer B. D. (2005). *Statistical demography and forecasting*. Springer.
2. Angrisani M. (2000). *Il tasso di sostituzione nella previdenza*. Seminario Università degli Studi di Sassari, Facoltà di Economia.
3. Angrisani M. (2002). *La pensione integrata a punti*. Rivista della Previdenza Pubblica e Privata, vol. 1.
4. Angrisani M. (2003). *Equità e solidarietà intergenerazionale*. Atti Convegno "La previdenza dei liberi professionisti tra mercato e solidarietà", Università degli Studi di Tor Vergata.
5. Angrisani M. (2008). *The logical sustainability of the pension system*. P.U.M.A. Pure Mathematics and Applications, Vol. 19, No. 1, 67-81.
6. Angrisani M., Attias A., Bianchi S., Varga Z. (2006). *Demographic dynamic for the pay-as-you-go pension system*.

PU.M.A. Pure Mathematics and Applications, Vol. 15, No. 4, 357-374.

7. Angrisani M., Attias A., Bianchi S., Varga Z. (2010). *Dynamic analysis of the effect of immigration on the demographic background of the pay-as-you-go pension system*. Maf 2010 – Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance, 6-7.
8. Attias A. (2007a). *Equilibrio demografico e flessibilità del sistema pensionistico*. Atti XIII Convegno della Teoria del Rischio, Università del Molise, Campobasso, Aracne ed., 5-37.
9. Attias A. (2007b). *Flessibilità dell'aliquota contributiva e consapevolezza del futuro tasso di sostituzione: un legame indissolubile*. Previdenza, periodico trimestrale dell'Ente Nazionale di Previdenza e Assistenza della Professione Infermieristica, N°2, 12-15.
10. Associazione Italiana per gli Studi di Popolazione, Società Italiana di Statistica (2011). *Rapporto sulla popolazione. L'Italia a 150 anni dall'Unità*, il Mulino.
11. Blake D., Mayhew L. (2006). *On the sustainability of the UK state pension system in the light of population ageing and declining fertility*. The Economic Journal, 116, 286-305.
12. Cazzola G., Treu T. (2010). *Alcune riflessioni sulla proposta di Legge 1299*. Previdenza, periodico trimestrale dell'Ente Nazionale di Previdenza e Assistenza della Professione Infermieristica, N°1, 24-29.
13. Commissione europea e comitato di politica economica (2009). *Ageing report: Economic and budgetary projections for the EU-27 Member States (2008-2060)*. European Economy, n° 2.

14. Commissione Europea (2010). *Libro Verde, verso sistemi pensionistici adeguati, sostenibili e sicuri in Europa*. Bruxelles.
15. Comitato economico e sociale europeo (2009), *Parere del Comitato economico e sociale europeo sul tema: La strategia di Lisbona dopo il 2010*. Relatore generale Wolfgang Greif. Bruxelles.
16. Commissione Ministeriale per la valutazione degli effetti della legge n°335/95 e successive provvedimenti (2001). *Verifica del sistema previdenziale ai sensi della legge 335/95 e successive provvedimenti, nell'ottica della competitività dello sviluppo e dell'equità*. Roma, Italia.
17. Coppini M. A. (1989). *Il modello Inps e le prime proiezioni al 2010*. Inps, supplemento alla rivista Previdenza Sociale, Roma, Italia.
18. Fehr H., Habermann C. (2006). *Pension reform and demographic uncertainty: the case of Germany*. Journal of Pension Economics and Finance, 5:1: 69-90.
19. Istat (2002). *Le previsioni della popolazione residente per sesso, età e regione dall'1.01.2001 all'1.01.2051*. Informazioni a cura di Marsili M. e Sorvillo M.P., Roma, Italia.
20. Istat – Inps (2011). *Trattamenti pensionistici e beneficiari al 31.12.2009*, Roma, Italia.
21. Leslie P. H. (1945). *On the use of matrices in certain population mathematics*. Biometrika, 33, N° 3, 183-212, Oxford University Press, UK.
22. Leslie P. H. (1948). *Some further notes on the use of matrices in certain population mathematics*. Biometrika, 35, N° 3-4, 213-245, Oxford University Press, UK.

23. Myers R.J. (1994). *Components of population aging and their effect on social security programs*. Transactions of international congress of actuaries, vol. 4/1992. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 14, Issue 1.
24. Nannestad P. (2007). *Immigration and welfare states: a survey of 15 years of research*. European Journal of Political Economy 23, 512-532.
25. Sanchez M., Alfonso R. (2010). *Endogenous retirement and public pension system reform in Spain*. Economics Modelling 27, 336-349.
26. Treu T. (2011). *Una revisione sistemica*. Previdence, periodico trimestrale dell'Ente Nazionale di Previdenza e Assistenza della Professione Infermieristica, N°3, 30-33.
27. Varga Z. (1984). *Un modelo en la dinámica de poblaciones*. Notas de Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela, 84-ED-03 1-40. Venezuela.
28. Varga Z., Sebestyen Z., Gamez M., Cabello T., Attias A. (2011). *Models of applied population dynamics*. Mechanical Engineering Letters, Annual Technical-Scientific journal, Szent Istvan University, Vol 4, 2010, 22-36. Godollo, Hungary.
29. Wenko B. (2008). *Immigration and the pay-as-you-go pension system*. Vdm Verlag.

APPENDICE

EQUILIBRIO DEMOGRAFICO E SISTEMA PENSIONISTICO A DUE
QUOTE: UN TASSO DI SOSTITUZIONE PENSATO PER L'ADEGUATEZZA

Coefficienti di trasformazione

Età	1995	2010 su dati 2006
57	4,720	4,419
58	4,860	4,538
59	5,006	4,664
60	5,163	4,798
61	5,334	4,940
62	5,514	5,093
63	5,706	5,257
64	5,911	5,432
65	6,136	5,620

