CAMBIO DI NUMERAIRE:

I prezzi devono essere espressi tutti nella stessa U.d.M.

⇒ li dobbiamo rapportare rispetto ad un dato PS detto NUMERAIRE

⇒ cambia la EMM $\mathbb{Q}$!

Ricordiamo che il 1° THM FONDAMENTALE DI APT garantisce che se $\exists\, \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ allora $\frac{S_t}{B_t}$ è martingala sotto $\mathbb{Q}$

↳ prezzo scontato del ptf.

⇒ in questo caso, B_t è il nostro numeraire.

Sia Π_t il prezzo di un derivato t.c. $\frac{\Pi_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right]$,

con H_T = PAYOFF del derivato

$$\Rightarrow \Pi_t = B_t\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} H_T \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Sostituiamo B_t con un nuovo processo S_t^0:

$$\frac{\Pi_t}{S_t^0} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}\left[\frac{H_T}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right] \Rightarrow \Pi_t = S_t^0\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}\left[\frac{H_T}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

⇒ possiamo sempre operare questa sostituzione?

TEOR (fondamentale del cambio di numeraire)
Sia $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ una EMM su $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$. Dato un processo $\{S_t^0\}_{t\geq 0}$ con $S_t^0 > 0$ e t.c. S_t^0 è martingala sotto $\mathbb{Q}$,
$\exists\, \mathbb{Q}^0 \sim \mathbb{Q}$ tale che $\frac{S_t}{S_t^0}$ è martingala sotto $\mathbb{Q}^0$, qualunque sia il processo S_t. Inoltre, $L := \frac{d\mathbb{Q}^0}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_T^0}{B_T S_0^0}$.

Dim:

⑤ $\mathbb{E}^{Q^\circ}\left[\frac{S_t}{S_t^\circ} \mid \mathcal{F}_s\right] = \frac{\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t L}{S_0^\circ} \mid \mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{Q}\left[L_t \mid \mathcal{F}_s\right]} \overset{(*)}{=} 1$ $\quad \forall\, s<t$,

↓

perché ④ $\mathbb{E}^{Q^\circ}[X] := \int_\Omega X(\omega)\, dQ^\circ(\omega) = \int_\Omega X(\omega) \frac{dQ(\omega)}{dQ(\omega)} dQ^\circ(\omega)$

$= \int_\Omega X(\omega) \frac{dQ^\circ(\omega)}{dQ(\omega)} dQ(\omega) = \int_\Omega X(\omega) L(\omega)\, dQ(\omega) = \mathbb{E}^{Q}[XL]$

$\overset{(*)}{=} \frac{\mathbb{E}^{Q^\circ}\left[\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t L_t}{S_t^\circ} \mid \mathcal{F}_t\right] \mid \mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{Q}\left[L_t \mid \mathcal{F}_s\right]}$

$= \frac{\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t}{S_t^\circ} L_t \mid \mathcal{F}_s\right]}{L_s} = \frac{S_0^Q B_s}{S_s^\circ} \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t}{S_t^Q} \frac{S_t^Q}{B_t S_0^Q} \mid \mathcal{F}_s\right]$

$= \frac{B_s}{S_s^\circ} \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t}{B_t} \mid \mathcal{F}_s\right] = \frac{B_s}{S_s^\circ} \frac{S_s}{B_s} = \frac{S_s}{S_s^\circ}$

$\Rightarrow \left\{\frac{S_t}{S_t^\circ}\right\}_{t\geq 0}$ è una martingala sotto Q° ▤

(*) In generale, $\forall\, X \in L^2(Q)$, $\mathbb{E}^{Q^\circ}[X_t \mid \mathcal{F}_t] = M_t$ è MG sotto Q.

① Infatti: $\mathbb{E}^{Q}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{Q}\left[\mathbb{E}^{Q}[X \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s\right] \overset{\text{indip. de } t}{=} \mathbb{E}^{Q^\circ}[X \mid \mathcal{F}_s] \overset{\text{def}}{=} M_s$.

$\Rightarrow \mathbb{E}^{Q}[L_t] \overset{\text{def } L_t}{=} \mathbb{E}^{Q}\left[\mathbb{E}^{Q}[L \mid \mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}^{Q}[L] = \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{dQ^\circ}{dQ}\right]$

$= \int_\Omega \frac{dQ^\circ(\omega)}{dQ(\omega)} dQ(\omega) = \int_\Omega dQ^\circ(\omega) = 1$ ② $\mathbb{E}^{Q}[L \mid \mathcal{F}_s] = 1$

$\Rightarrow L_t$ è MG positiva di media 1 (*)

③ Inoltre, $\mathbb{E}^{Q}[L_t] = \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_T^\circ}{B_T S_0^\circ} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{S_0^\circ} \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_T^\circ}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right] \overset{(MG)}{=} \frac{1}{S_0^\circ} \frac{S_t^\circ}{B_t}$

APPLICAZIONE: MISURA FORWARD

⇒ Consideriamo come numerario il prezzo $P(t,T)$ di un T-bond (ZCB)

⇒ $\mathbb{Q}^T \sim \mathbb{Q}, \mathbb{P}$ corrispondente al cambio di numerario da B_t a $P(t,T)$

↳ MISURA FORWARD

(TEOR) ⇒ $L = \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{P(t,T)}{B_t P(0,T)}$ (•) ⇒ $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^T} = \frac{B_t P(0,T)}{P(t,T)}$

Se Π_t è il prezzo di un derivato con payoff X_T

⇒ $\Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} X_T \mid \mathcal{F}_t \right]$

↓ (1° THM APT)

partiamo da $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^T \Rightarrow \tilde{L}_T = \frac{1}{L_T} = \frac{B_T P(0,T)}{P(T,T)}$

(t=0) ⇒ $\Pi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_T}{B_T} \right]$

(TEOR) $= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{X_T}{B_T} \cdot L_T \right] \overset{(\bullet)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{X_T}{B_T} \frac{P(T,T)}{P(T,T)} B_T \right]$

$= P(0,T)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[X_T \right]$

⇒ In generale: $\Pi_t = P(t,T)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[X_T \mid \mathcal{F}_t \right]$.

NOTA: Se r_t deterministico, allora $\mathbb{Q}^T \equiv \mathbb{Q}$.

⇒ Nel nostro caso, r_t non deterministico

⇒ È possibile avere una formula per la valutazione di derivati tipo-BS che valga in generale?

⇒ Sì, se effettuiamo un cambio di numerario.

$$(S_T - k)^+ = (S_T - k)\mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}} = S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}} - k\mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}}$$

$$\Rightarrow \Pi_t = \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds}(S_T - k)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{E}^Q\left[\frac{B_t}{B_T}(S_T - k)\mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{E}^Q\left[\frac{B_t}{B_T} S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] - k\mathbb{E}^Q\left[\frac{B_t}{B_T}\mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= S_t \mathbb{E}^{Q^S}\left[\mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] - k\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[\mathbb{1}_{\{S_T \geq k\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \cdot p(0,T)$$

$$\overset{(t=0)}{\Rightarrow} \Pi_0 = S_0 \mathbb{1}^{(Q^S)}_{\{S_T \geq k\}} - k\,\mathbb{1}^{(Q^T)}_{\{S_T \geq k\}} = S_0 Q^S(S_T \geq k) - k Q^T(S_T \geq k)$$

Poniamo $Z_t := \frac{S_t}{p(t,T)}$, con $dZ_t = Z_t\left[\mu_t^Z dt + \sigma_t^Z dW_t\right]$ (sotto Q^T)

$$\overset{(Q^T)}{\Rightarrow} dZ_t = Z_t \sigma_t^Z dW_t^{Q^T}$$

$$\Rightarrow Z_t = Z_0 \exp\left\{\int_0^T \sigma_s^Z dW_s^{Q^T} - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_s^Z)^2 ds\right\}$$

↳ distribuzione log-normale

$$\Rightarrow Z_t = Z_0 \exp\{X\},\ X \sim N\left(-\tfrac{1}{2}\Sigma^2, \Sigma^2\right),$$

$$\text{con } \Sigma^2 := \int_0^T (\sigma_s^Z)^2 ds$$

$$\Rightarrow Q^T(S_T \geq k) = Q^T\left(\frac{S_T}{p(T,T)} \geq k\right) = Q^T(Z_T \geq k)$$

$$= Q^T\left(Z_0 \exp\{X\} \geq k\right) = Q^T\left(\exp\{X\} \geq \frac{k}{Z_0}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(\exp\{X\} \geq \frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) = \mathbb{Q}^T\left(X \geq \ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(\sqrt{\Sigma^2}\,\tilde{X} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \geq \ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right)\right), \quad \text{con } \tilde{X} \sim N(0,1)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(\tilde{X} \geq \frac{\ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(\tilde{X} \geq -\frac{-\ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(-\tilde{X} \leq \frac{-\ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(-\tilde{X} \leq \underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K\cdot p(0,T)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}}}_{=:\, d_2}\right) = \Phi(d_2)$$

Analogamente:

$$Y_t := \frac{p(t,T)}{S_t} =: \frac{1}{Z_t}, \quad dY_t = -Y_t\left[\mu_t^Y dt + \underbrace{\sigma_t^Z}_{\text{stessa del caso } T!} dW_t\right]$$

$$\overset{(\mathbb{Q}^S)}{\Rightarrow} dY_t = -Y_t\,\sigma_t^Z\, dW_t^{\mathbb{Q}^S}$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 \exp\left\{-\int_0^T \sigma_s^Z\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_s^Z)^2\, ds\right\}$$

↳ distr. log-normale

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 \exp\{X\}, \quad X \sim N\left(-\frac{1}{2}\Sigma^2, \Sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}^S\left(S_T \geq k\right) = \mathbb{Q}^S\left(\frac{1}{S_T} \leq \frac{1}{k}\right) = \mathbb{Q}^S\left(\frac{P(T,T)}{S_T} \leq \frac{1}{k}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(Y_T \leq \frac{1}{k}\right) = \mathbb{Q}^S\left(Y_0 \exp\{X\} \leq \frac{1}{k}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(\exp\{X\} \leq \frac{1}{k \cdot Y_0}\right) = \mathbb{Q}^S\left(\exp\{X\} \leq \frac{\cancel{S_0}}{k \cdot P(0,T)}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(X \leq \ln\left(\frac{S_0}{k \cdot P(0,T)}\right)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(\sqrt{\Sigma^2} \cdot \tilde{X} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \leq \ln\left(\frac{S_0}{k \cdot P(0,T)}\right)\right), \quad \tilde{X} \sim N(0,1)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(\tilde{X} \leq \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{k \cdot P(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}}_{\| \; d_1}\right) = \phi(d_1)$$

OSS:

$$d_1 - \sqrt{\Sigma^2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k\,P(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}} - \sqrt{\Sigma^2} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k\,P(0,T)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}} = d_2 \Rightarrow d_2 = d_1 - \sqrt{\Sigma^2}$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = S_0\,\mathbb{Q}^S\left(S_T \geq k\right) - k\,\mathbb{Q}^T\left(S_T \geq k\right)$$

$$= S_0 \cdot \phi(d_1) - k\,P(0,T)\,\phi(d_2)$$

$\blacksquare$

↳ FORMULA GENERALE PER LA VALUTAZIONE DI OPZIONI (Geman, El Karoui, Rochet 1995)