ESERCITAZIONE SUI PUNTI STAZIONARI DI FUNZIONI LIBERE E SULLE FUNZIONI OMOGENEE

1 Funzioni libere

I punti stazionari di una funzione libera di più variabili si ottengono risolvendo il sistema di equazioni scritte uguagliando a zero le derivate parziali della funzione stessa.

In questa nota, scritta in relazione agli esercizi d'esame, ci occuperemo soltanto delle funzioni di due variabili, anticipando che non vi è alcuna differenza concettuale fra i casi di due e più variabili e rimandando a corsi successivi l'applicazione dei metodi, diversi soltanto dal punto di vista algebrico, per l'analisi delle funzioni con un numero di variabili maggiore di 2.

Per stabilire la natura di un punto stazionario, si costruisce dunque la matrice *hessiana* $\mathcal{H}(x, y)$ avente come elementi le derivate seconde della funzione $f(x, y)$ e si studia quindi il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice numerica $\mathcal{H}(x_0, y_0)$ ottenuta sostituendo nella matrice hessiana le coordinate (x_0, y_0) del punto stazionario considerato.

Le matrici hessiane delle funzioni di due variabili $f(x, y)$ d'esame sono matrici simmetriche di ordine 2 aventi entrambi gli autovalori diversi da zero. Per studiare il segno di tali autovalori utilizziamo le due proprietà generali degli autovalori di una matrice:

- il prodotto degli autovalori di una matrice è uguale al determinante della matrice;
- la somma degli autovalori di una matrice è uguale alla somma degli elementi sulla diagonale principale della matrice.

In particolare abbiamo allora per gli autovalori tre casi possibili a cui corrispondono i tre diversi comportamenti della funzione nell'intorno di un punto stazionario:

1. se vale $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, cioè gli autovalori sono discordi in segno, allora il punto stazionario è una *sella*;
2. se vale $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, cioè gli autovalori sono concordi negativi, allora il punto stazionario è un *massimo*;
3. se vale $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, cioè gli autovalori sono concordi positivi, allora il punto stazionario è un *minimo*.

Riguardo alle matrici simmetriche di ordine 2 possiamo aggiungere infine che vale un'importante (*e facilmente dimostrabile*) proprietà espressa dalla seguente

proposizione: *se una matrice A simmetrica di ordine 2 ha determinante positivo, allora essa ha gli elementi sulla diagonale principale concordi in segno, ovvero*

$$\det A > 0 \Longrightarrow a_{11} \cdot a_{22} > 0$$

Ovviamente non vale il viceversa, ovvero se gli elementi sulla diagonale principale di una matrice simmetrica di ordine 2 sono concordi, non si può dire nulla sul segno del determinante, perché tale segno dipende a questo punto da quale *diagonale pesa di più*, come è immediato verificare con degli esempi.

I tre casi possibili in cui possono presentarsi i due autovalori (*entrambi diversi da zero!*) delle matrici hessiane di ordine 2 in corrispondenza di un punto stazionario (x_0, y_0), possono essere individuati mediante una più semplice osservazione degli elementi della matrice hessiana stessa $\mathcal{H}(x_0, y_0)$. Si ha in particolare:

1. se il determinante della matrice hessiana è negativo, allora il punto stazionario (x_0, y_0) è una *sella* (perché da $\det \mathcal{H}(x_0, y_0) < 0$ segue $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ e quindi che gli autovalori sono discordi in segno);

2. se il determinante della matrice hessiana è positivo e gli elementi sulla diagonale principale (*concordi per la proposizione*) sono positivi, allora il punto stazionario (x_0, y_0) è un *minimo*;

3. se il determinante della matrice hessiana è positivo e gli elementi sulla diagonale principale (*concordi per la proposizione*) sono negativi, allora il punto stazionario (x_0, y_0) è un *massimo*.

1.1 Primo esercizio

Consideriamo la seguente funzione di due variabili

$$f(x, y) = -x^2 + 3xy - 2y^3$$

e determiniamo la "natura" dei suoi punti stazionari.

Le derivate parziali della $f(x, y)$, che rappresentano le componenti del vettore gradiente, sono

$$f_x(x, y) = -2x + 3y \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 3x - 6y^2$$

da cui ricaviamo il sistema per la determinazione dei punti stazionari

$$\begin{cases} -2x + 3y & = & 0 \\ 3x - 6y^2 & = & 0 \end{cases}$$

Dalla prima delle due equazioni esplicitiamo la relazione

$$x = \frac{3y}{2}$$

che sostituita nella seconda fornisce

$$\frac{3}{2}\, y(3 - 4y) = 0$$

Da quest'ultima equazione (di secondo grado) otteniamo le due soluzioni

$$y = 0 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{3}{4}$$

a cui corrispondono i due punti stazionari

$$O = (0,0) \qquad \text{e} \qquad A = \left(\frac{9}{8}\,,\,\frac{3}{4}\right)$$

Per determinare il comportamento della funzione nell'intorno di un punto stazionario ("natura" del punto stazionario), studiamo la matrice hessiana della funzione in corrispondenza del punto.

Le derivate seconde della funzione $f(x, y)$ sono

$$f_{xx}(x,y) = -2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 3, \qquad f_{yy}(x,y) = -12y$$

che rappresentano gli elementi della matrice hessiana $\mathcal{H}(x, y)$ disposti come segue

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -12y \end{pmatrix}$$

Sostituendo il primo punto stazionario, otteniamo

$$\mathcal{H}(O) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché vale

$$\det \mathcal{H}(O) = -9 \, < \, 0$$

segue che il punto $O = (0, 0)$ è una *sella*.

Riguardo al secondo punto stazionario, abbiamo

$$\mathcal{H}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Poiché vale

$$\det \mathcal{H}(A) = 9 \, > \, 0$$

e gli elementi sulla diagonale principale sono negativi, allora concludiamo che il punto $A = \left(\frac{9}{8}\,,\,\frac{3}{4}\right)$ è un *massimo*.

1.2 Secondo esercizio

Consideriamo la seguente funzione di due variabili

$$f(x,y) = (x^2 + xy)\, e^{y-x}$$

e determiniamo la "natura" dei suoi punti stazionari.

Le derivate parziali della $f(x, y)$, che rappresentano le componenti del vettore gradiente, sono

$$f_x(x,y) = e^{y-x}\,(2x + y - x^2 - xy) \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = e^{y-x}\,(x + x^2 + xy)$$

da cui ricaviamo il sistema per la determinazione dei punti stazionari

$$\begin{cases} 2x + y - x^2 - xy & = & 0 \\ x + x^2 + xy & = & 0 \end{cases}$$

Mettendo x in evidenza nella seconda equazione, si ottiene

$$x\,(1 + x + y) = 0$$

da cui ricaviamo le due espressioni

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = -x - 1$$

Sostituendo $x = 0$ nella prima equazione, ricaviamo $y = 0$, ovvero il punto stazionario $O(0, 0)$.

Sostituendo poi $y = -x - 1$ nella prima equazione del sistema, si ricava $2x - 1 = 0$, da cui si ottiene

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

ovvero il punto stazionario

$$A\left(\frac{1}{2}\,,\,-\frac{3}{2}\right)$$

Per determinare il comportamento della funzione nell'intorno di un punto stazionario ("natura" del punto stazionario), studiamo la matrice hessiana della funzione $f(x, y)$ in corrispondenza del punto.

Le derivate seconde della funzione $f(x, y)$ sono

$$f_{xx}(x, y) = e^{y-x}(2 - 4x - 2y + x^2 + xy)$$

$$f_{yy}(x, y) = e^{y-x}(2x + x^2 + xy)$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = e^{y-x}(1 + x + y - x^2 - xy)$$

che rappresentano gli elementi della matrice hessiana $\mathcal{H}(x, y)$.

Calcoliamo ora la matrice hessiana in corrispondenza dei due punti stazionari. Per il punto O abbiamo la matrice

$$\mathcal{H}(O) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché vale

$$\det \mathcal{H}(O) = -1 \,<\, 0$$

segue che il punto $O = (0, 0)$ è una *sella*.

Per il secondo punto stazionario, otteniamo la matrice

$$\mathcal{H}(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{5e^{-2}}{2} & \dfrac{e^{-2}}{2} \\[2ex] \dfrac{e^{-2}}{2} & \dfrac{e^{-2}}{2} \end{pmatrix}$$

Poiché vale

$$\det \mathcal{H}(A) = e^{-4} \; > \; 0$$

e gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, allora concludiamo che il punto $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ è un *minimo*.

2 Funzioni omogenee

Le funzioni omogenee rivestono un particolare interesse nella teoria economica perché sono le funzioni adatte a descrivere situazioni, per esempio nel consumo, nella produzione, nella crescita, in cui si vuole dare risalto a quelli che si chiamano *rendimenti di scala*.

Definizione: una funzione di due variabili $f(x, y)$ si dice *omogenea di grado* α se per ogni $t > 0$ vale

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$$

Teorema (di Eulero): se una funzione è omogenea di grado α, allora essa verifica la relazione

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \alpha f(x, y) \tag{1}$$

Derivando ambo i membri della relazione (1) rispetto a x, si ottiene la nuova relazione

$$f_x(x, y) + x f_{xx}(x, y) + y f_{yx}(x, y) = \alpha f_x(x, y)$$

da cui segue

$$x f_{xx}(x, y) + y f_{yx}(x, y) = (\alpha - 1) f_x(x, y) \tag{2}$$

Analogamente derivando ambo i membri della relazione (1) rispetto a y, si ottiene la nuova relazione

$$x f_{xy}(x, y) + f_y(x, y) + y f_{yy}(x, y) = \alpha f_y(x, y)$$

da cui segue

$$x f_{xy}(x, y) + y f_{yy}(x, y) = (\alpha - 1) f_y(x, y) \tag{3}$$

Quindi concludiamo che la (2) e la (3) sono due relazioni verificate dalle funzioni omogenee equivalenti alla (1).

2.1 Esercizio

Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \sqrt[3]{\frac{x^2y^3 + 2xy^4 - 4x^5}{3x - y}}$$

è omogenea e in caso affermativo di che grado.

Per stabilire se una funzione è omogenea oppure no, occorre sostituire a x e a y, in base alla definizione data, rispettivamente tx e ty nella $f(x,y)$ e vedere se il risultato della sostituzione è

$$t^\alpha\, f(x,y)$$

oppure no. Se il risultato che si ottiene è appunto $t^\alpha\, f(x,y)$, allora l'esponente α prende il nome di *grado di omogeneità* della $f(x,y)$.

Nel caso della funzione proposta, abbiamo

$$f(tx,ty) = \sqrt[3]{\frac{(tx)^2(ty)^3 + 2(tx)(ty)^4 - 4(tx)^5}{3(tx) - (ty)}} = \sqrt[3]{\frac{t^5(x^2y^3 + 2xy^4 - 4x^5)}{t(3x - y)}} =$$

$$= \sqrt[3]{t^4 \left[\frac{x^2y^3 + 2xy^4 - 4x^5}{3x - y}\right]} = \left(t^{\frac{4}{3}}\right) \sqrt[3]{\frac{x^2y^3 + 2xy^4 - 4x^5}{3x - y}} = t^{\frac{4}{3}}\, f(x,y)$$

La funzione data è dunque omogenea di grado $\dfrac{4}{3}$ pari all'esponente di t che si ritrova nel risultato della sostituzione $f(tx,ty)$.

Come osservazione conclusiva possiamo dire che, essendo il numeratore un polinomio omogeneo di quinto grado e il denominatore un polinomio omogeneo di primo grado, il grado di omogeneità della funzione proposta è risultato essere pari al rapporto fra la differenza 4 dei gradi di numeratore e denominatore e l'indice 3 della radice.