ESERCITAZIONE SULLE FUNZIONI VINCOLATE: ESTREMI E OTTIMI PARETIANI

1 Estremi vincolati

Data una funzione $f(x, y)$ e una regione $A \subset \mathcal{R}^2$, il problema che ci poniamo è quello di determinare i punti di estremo (x_0, y_0) che appartengano alla regione A. Se denominiamo la regione A "vincolo", allora diciamo che il problema è quello di determinare i punti di estremo (massimo e/o minimo) vincolati (ad appartenere alla regione A).

In particolare sceglieremo come vincolo una regione di $\mathcal{R}^2$ (sottoinsieme di $\mathcal{R}^2$) costituita dai punti di una curva $g(x, y) = 0$ e indicata con il simbolo $\mathcal{C}$. Pertanto un punto (x_0, y_0) appartiene al vincolo $\mathcal{C}$ se verifica l'equazione $g(x_0, y_0) = 0$.

Definizione: un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ si dice di *massimo vincolato* se esiste un intorno $I \subseteq \mathcal{C}$ tale che

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in I$$

e si dice di *minimo vincolato* se esiste un intorno $I \subseteq \mathcal{C}$ tale che

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in I$$

Osservazione: dato un punto (x_0, y_0) di massimo vincolato, non è detto che valga

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}$$

e dato un punto (x_0, y_0) di minimo vincolato, non è detto che valga

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}$$

ovvero non è detto che un punto di massimo vincolato sia anche un punto di massimo assoluto, così come non è detto che un punto di minimo vincolato sia anche un punto di minimo assoluto. Ricordando il teorema di Weierstrass, concludiamo che se il vincolo è un sottoinsieme di $\mathcal{R}^2$ chiuso e limitato, allora la funzione $f(x, y)$ possiede massimo e minimo assoluti nel sottoinsieme. Data una funzione $f(x, y)$ e un vincolo $g(x, y) = 0$, la ricerca degli estremi condizionati si effettua scrivendo quella che si chiama funzione *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

e risolvendo dunque il sistema di equazioni costituito dalle derivate parziali rispetto a x e a y della $\mathcal{L}$ uguagliate a zero e dall'equazione del vincolo. La "natura" di un punto P di estremo vincolato così trovato si determina calcolando infine il determinante di quella che si chiama matrice *hessiana orlata* $\bar{\mathcal{H}}(x, y; \lambda)$, avente struttura per cui si rimanda al testo di riferimento. Si ha in particolare che il punto P è

- un punto di *minimo vincolato* se vale $\det \bar{\mathcal{H}}(P) < 0$;
- un punto di *massimo vincolato* se vale $\det \bar{\mathcal{H}}(P) > 0$

1.1 Primo esercizio

Determiniamo i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = 2x - 3y$$

vincolati ad appartenere alla curva (vincolo) $g(x,y) = 0$ data dall'equazione implicita

$$xy + 1 = 0$$

Costruiamo la funzione *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = 2x - 3y + \lambda(xy + 1)$$

avente derivate parziali rispetto a x e a y date da

$$\mathcal{L}_x(x,y;\lambda) = 2 + \lambda y \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_y(x,y;\lambda) = -3 + \lambda x$$

Con le derivate parziali rispetto a x e a y della lagrangiana e con l'equazione del vincolo, scriviamo il sistema

$$\begin{cases} 2 + \lambda y & = & 0 \\ -3 + \lambda x & = & 0 \\ xy + 1 & = & 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la relazione

$$\lambda = \frac{3}{x}$$

che sostituita nella prima, fornisce l'equazione

$$2x + 3y = 0 \tag{1}$$

In quest'ultima equazione abbiamo già eseguito il minimo comune multiplo per eliminare il denominatore x e non ci siamo "preoccupati" dello zero del denominatore $x = 0$ perché il vincolo in ogni caso non contiene punti aventi ascissa pari a zero.

Aggiungendo dunque l'equazione del vincolo alla (1), ricavata "eliminando" λ dalle prime due equazioni, otteniamo il nuovo sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y & = & 0 \\ xy + 1 & = & 0 \end{cases}$$

Ricavando dalla prima equazione

$$y = -\frac{2}{3}x$$

e sostituendo nella seconda, si ottiene

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Sostituendo ora un valore di x per volta in y e in λ, si ricavano, con semplici passaggi con i radicali, i punti di estremo

$$A = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{6}\right) \qquad \text{e} \qquad B = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}};\ -\sqrt{6}\right)$$

dove solo le prime due coordinate sono quelle *fisiche*, ovvero quelle rappresentano i punti sul piano cartesiano; le terze coordinate $\pm\sqrt{6}$ sono soltanto parametri che compaiono nella matrice hessiana orlata.

Calcoliamo ora gli elementi della matrice hessiana orlata per stabilire la *natura* dei punti di estremo trovati:

$$g_x(x,y) = y, \quad g_y(x,y) = x, \quad \mathcal{L}_{xx}(x,y;\lambda) = \mathcal{L}_{yy}(x,y;\lambda) = 0, \quad \mathcal{L}_{xy}(x,y;\lambda) = \lambda$$

Sostituendo il punto A nella matrice hessiana orlata, si ottiene la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

e poiché vale $\det \bar{\mathcal{H}}(A) = -2\sqrt{6} < 0$, concludiamo che il punto A è un punto di minimo vincolato.

Sostituendo il punto B nella matrice hessiana orlata, si ottiene la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

e poiché vale $\det \bar{\mathcal{H}}(B) = 2\sqrt{6} > 0$, concludiamo che il punto B è un punto di massimo vincolato.

Osserviamo in conclusione che A non è il minimo assoluto e che B non è il massimo assoluto della funzione $f(x,y)$: si ha inoltre la relazione $f(B) < f(A)$, come si potrebbe verificare immediatamente eseguendo il calcolo, ovvero il risultato dato dalla funzione nel punto di massimo è minore del risultato ottenuto nel punto di minimo.

La ragione di questa disuguaglianza sta nella struttura del vincolo che è un'iperbole, cioè una curva non limitata per la quale non vale dunque il teorema di Weierstrass.

A e B sono allora rispettivamente minimo e massimo vincolati della funzione $f(x,y)$ relativamente ad un loro opportuno intorno sul vincolo, come si dedurrebbe graficamente dall'analisi geometrica del vincolo e delle curve di livello della funzione.

1.2 Secondo esercizio

Determiniamo i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = xy$$

vincolati ad appartenere alla curva (vincolo) data dall'equazione

$$y = 3x^2 - 4x - 1$$

Per costruire la funzione *lagrangiana* scriviamo l'equazione del vincolo nella forma implicita $g(x, y) = 0$, ovvero

$$3x^2 - 4x - y - 1 = 0$$

La funzione lagrangiana del problema è dunque

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = xy + \lambda(3x^2 - 4x - y - 1)$$

avente derivate parziali rispetto a x e a y date da

$$\mathcal{L}_x(x, y; \lambda) = y + 6\lambda x - 4\lambda \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_y(x, y; \lambda) = x - \lambda$$

Con le derivate parziali rispetto a x e a y della lagrangiana e con l'equazione del vincolo, scriviamo il sistema

$$\begin{cases} y + 6\lambda x - 4\lambda & = & 0 \\ x - \lambda & = & 0 \\ 3x^2 - 4x - y - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la relazione

$$\lambda = x$$

che sostituita nella prima, fornisce l'equazione

$$y + 6x^2 - 4x = 0 \tag{2}$$

Aggiungendo dunque l'equazione del vincolo alla (2), ricavata "eliminando" λ dalle prime due equazioni, otteniamo il nuovo sistema

$$\begin{cases} y + 6x^2 - 4x & = & 0 \\ 3x^2 - 4x - y - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Ricavando dalla prima equazione

$$y = 4x - 6x^2$$

e sostituendo nella seconda, si ottiene l'equazione risolvente

$$9x^2 - 8x - 1 = 0$$

che possiede le due soluzioni

$$x = 1 \qquad \text{e} \qquad x = -\frac{1}{9}$$

Sostituendo ora un valore di x per volta in y e in λ, si ricavano i punti di estremo

$$A = (1, -2; 1) \qquad \text{e} \qquad B = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{14}{27}; -\frac{1}{9}\right)$$

Calcoliamo ora gli elementi della matrice hessiana orlata per stabilire la *natura* dei punti di estremo trovati:

$$g_x(x,y) = 6x - 4, \quad g_y(x,y) = -1, \quad \mathcal{L}_{xx} = 6\lambda, \quad \mathcal{L}_{yy} = 0, \quad \mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx} = 1$$

Sostituendo il punto A nella matrice hessiana orlata, si ottiene la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e poiché vale $\det \bar{\mathcal{H}}(A) = -10 < 0$, concludiamo che il punto A è un punto di minimo vincolato.

Sostituendo il punto B nella matrice hessiana orlata, si ottiene la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{14}{3} & -1 \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e poiché vale $\det \bar{\mathcal{H}}(B) = 10 > 0$, concludiamo che il punto B è un punto di massimo vincolato.

1.3 Terzo esercizio

Determiniamo i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y - 2x$$

vincolati ad appartenere alla curva (vincolo) data dall'equazione (già implicita)

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

La funzione lagrangiana del problema è dunque

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = x^2 - y - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 2x)$$

avente derivate parziali rispetto a x e a y date da

$$\mathcal{L}_x(x, y; \lambda) = 2x - 2 + 2\lambda x - 2\lambda \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_y(x, y; \lambda) = -1 + 2\lambda y$$

Con le derivate parziali rispetto a x e a y della lagrangiana e con l'equazione del vincolo, scriviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x - 2\lambda & = & 0 \\ -1 + 2\lambda y & = & 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = & 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la relazione

$$\lambda = \frac{1}{2y}$$

che, sostituita nella prima, dà l'equazione

$$x - 1 + \frac{x}{2y} - \frac{1}{2y} = 0$$

equivalente all'equazione con il primo membro scomposto per raccoglimento parziale

$$(x - 1)(2y + 1) = 0 \tag{3}$$

In quest'ultima equazione è stato eseguito il minimo comune multiplo per "eliminare" il denominatore $2y$ e non ci siamo preoccupati dello zero del denominatore perché il vincolo ha nei due punti $(0, 0)$ e $(2, 0)$ di ordinata zero la tangente verticale che non potrà dunque coincidere con la tangente di una curva di livello della $f(x, y)$ perché la f ha come curve di livello solo parabole aventi tangenti oblique.

Aggiungendo quindi l'equazione del vincolo alla (3), ricavata "eliminando" λ dalle prime due equazioni del sistema iniziale, si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} (x - 1)(2y + 1) & = & 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = & 0 \end{cases}$$

Ricavando dalla prima equazione la soluzione

$$x = 1$$

e sostituendola nella seconda equazione e nell'espressione di λ, si ottiene

$$y = 1, \quad \lambda = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -1, \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

da cui discendono i punti

$$A = \left(1, 1; \frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad C = \left(1, -1; -\frac{1}{2}\right)$$

Analogamente, ricavando dalla prima equazione del nuovo sistema la soluzione

$$y = -\frac{1}{2}$$

e sostituendola nella seconda equazione, si ottengono i punti

$$B = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}; -1\right) \qquad \text{e} \qquad D = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}; -1\right)$$

Calcoliamo ora gli elementi della matrice hessiana orlata per stabilire la “natura” dei punti di estremo trovati:

$$g_x = 2x - 2, \qquad g_y = 2y, \qquad \mathcal{L}_{xx} = 2 + 2\lambda, \qquad \mathcal{L}_{xy} = 0, \qquad \mathcal{L}_{yy} = 2\lambda$$

Abbiamo allora, sostituendo il punto A, la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det \bar{\mathcal{H}}(A) = -12 < 0$, concludiamo che il punto A è un punto di *minimo vincolato*.

Sostituendo il punto C, si ricava la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det \bar{\mathcal{H}}(C) = -4 < 0$, concludiamo che anche il punto C è un punto di *minimo vincolato*.

Sostituendo il punto B, si ricava la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det \bar{\mathcal{H}}(B) = 6 > 0$, concludiamo che il punto B è un punto di *massimo vincolato*.

Sostituendo il punto D, si ricava la matrice

$$\bar{\mathcal{H}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det \bar{\mathcal{H}}(D) = 6 > 0$, concludiamo che anche il punto D è un punto di *massimo vincolato*.

2 Ottimi paretiani

Illustriamo brevemente il concetto di *ottimo paretiano* nella teoria microeconomica del consumo. Per semplicità consideriamo il caso particolare di una collettività composta da due consumatori che possono dividersi due beni di consumo x e y le cui dotazioni totali sono rispettivamente $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Immaginiamo ora di eseguire una prima allocazione dei due beni fra i due consumatori e poi una seconda allocazione degli stessi beni fra gli stessi consumatori. Indichiamo quindi con

- x_1 e x'_1 le quantità del bene x per il primo consumatore rispettivamente nella prima e nella seconda allocazione;
- y_1 e y'_1 le quantità del bene y per il primo consumatore rispettivamente nella prima e nella seconda allocazione;
- x_2 e x'_2 le quantità del bene x per il secondo consumatore rispettivamente nella prima e nella seconda allocazione;
- y_2 e y'_2 le quantità del bene y per il secondo consumatore rispettivamente nella prima e nella seconda allocazione.

Ovviamente valgono le seguenti relazioni che rappresentano quella che potremmo chiamare *limitatezza delle scorte*:

$$x_1 + x_2 = \bar{x}, \qquad y_1 + y_2 = \bar{y}$$

nella prima allocazione e analogamente

$$x'_1 + x'_2 = \bar{x}, \qquad y'_1 + y'_2 = \bar{y}$$

nella seconda allocazione.

Supponiamo ora che ciascun consumatore abbia una funzione di utilità che rappresenti il *piacere* procuratogli dal possesso di una certa quantità del bene x e del bene y e siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ le funzioni di utilità rispettivamente del primo e del secondo consumatore.

In base alle funzioni di utilità possiamo dire che la prima allocazione dei due beni di consumo procura ai due consumatori rispettivamente *piacere*

$$f(x_1, y_1) \qquad \text{e} \qquad g(x_2, y_2)$$

mentre la seconda allocazione procura ai due consumatori rispettivamente *piacere*

$$f(x'_1, y'_1) \qquad \text{e} \qquad g(x'_2, y'_2)$$

A questo punto allora possiamo introdurre i concetti di *miglioramento paretiano* e di *ottimo paretiano* ponendo la seguente

definizione: dati due consumatori che si dividono in due diversi modi le quantità di due beni di consumo, diciamo che la seconda allocazione (secondo modo di dividersi i beni) è *paretianamente migliore* della prima se passando dalla prima alla seconda allocazione almeno un consumatore vede aumentata la propria utilità purché l'altro non la veda diminuita.

Una certa allocazione si dice quindi *ottima paretianamente*, oppure semplicemente un *ottimo paretiano*, se non è ulteriormente migliorabile, ovvero se con qualunque ridistribuzione accade sempre che almeno un consumatore veda diminuita la propria utilità.

Dal punto di vista analitico si può dimostrare che la ricerca degli ottimi paretiani è un problema riconducibile al problema della ricerca di estremi vincolati, perché date due funzioni (di cui d'ora in poi "dimenticheremo" il significato economico!) quello che dovremo fare è trovare il massimo di una funzione considerando come vincolo una curva di livello dell'altra funzione.

Date le due funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$, scriveremo quindi la funzione lagrangiana $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ e determineremo l'insieme degli ottimi paretiani (detto in Economia *curva dei contratti*) "eliminando" λ e ricavando la curva $y = h(x)$ dal sistema di equazioni scritto uguagliando a zero le derivate parziali di $\mathcal{L}(x,y;\lambda)$ rispetto a x e a y.

Affinché un punto della curva $y = h(x)$ sia un punto di ottimo paretiano, deve verificarsi poi la condizione che il parametro λ sia positivo, in modo che questo punto rappresenti un'allocazione ottimale, cioè tale che passando ad un altro punto una delle due funzioni aumenti e l'altra diminuisca.

2.1 Primo esercizio

Si trovino gli ottimi paretiani relativi alla coppia di funzioni

$$\begin{cases} f(x,y) &= x^2 - 3y^2 \\ g(x,y) &= x^2 - y + 3x \end{cases}$$

Costruiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x^2 - 3y^2 + \lambda(x^2 - y + 3x)$$

e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y;\lambda) = 2x + 2\lambda x + 3\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y;\lambda) = -6y - \lambda = 0 \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

Ricavando λ dalla seconda equazione

$$\lambda = -6y$$

e sostituendola nella prima, si ottiene l'equazione implicita della curva sulla quale si trovano i punti di ottimo paretiano

$$x - 6xy - 9y = 0$$

da cui, mettendo in evidenza y, scaturisce l'equazione esplicita della curva degli ottimi paretiani

$$y = \frac{x}{6x + 9}$$

Poiché si ha $\lambda = -6y$, segue che si ha la condizione $\lambda > 0$ se vale

$$-6y > 0$$

ovvero se

$$y < 0$$

Concludiamo quindi che gli ottimi paretiani relativi alle due funzioni date sono i punti della curva

$$y = \frac{x}{6x + 9}$$

aventi ordinata $y < 0$.

2.2 Secondo esercizio

Si trovino gli ottimi paretiani relativi alla coppia di funzioni

$$\begin{cases} f(x,y) &= 2x^2 + y^2 \\ g(x,y) &= x + 4x^2 + y \end{cases}$$

Costruiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = 2x^2 + y^2 + \lambda(x + 4x^2 + y)$$

e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y;\lambda) &= 4x + \lambda + 8\lambda x &= 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y;\lambda) &= 2y + \lambda &= 0 \\ & \lambda &> 0 \end{cases}$$

Ricavando λ dalla seconda equazione

$$\lambda = -2y$$

e sostituendola nella prima, si ottiene l'equazione implicita della curva sulla quale si trovano i punti di ottimo paretiano

$$2x - y - 8xy = 0$$

da cui, mettendo in evidenza y, scaturisce l'equazione esplicita della curva degli ottimi paretiani

$$y = \frac{2x}{8x+1}$$

Poiché si ha $\lambda = -2y$, segue infine che si ha la condizione $\lambda > 0$ se vale

$$-2y > 0$$

ovvero se

$$y < 0$$

Concludiamo quindi che gli ottimi paretiani relativi alle due funzioni date sono i punti della curva

$$y = \frac{2x}{8x+1}$$

aventi ordinata $y < 0$.

2.3 Osservazione

Il sistema ottenuto uguagliando a zero le derivate parziali della lagrangiana rispetto a x e a y fornisce dunque la curva alla quale appartengono i punti di ottimo paretiano, ma “in generale” non tutti i punti della curva sono di ottimo paretiano. Il ruolo della condizione $\lambda > 0$ è quello dunque di “selezionare“ la *porzione* di curva che costituisce l'insieme degli ottimi paretiani.

Le equazioni che formano il sistema per la determinazione degli ottimi paretiani possono essere scritte nella forma vettoriale

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0$$

da cui segue

$$\lambda \nabla g = -\nabla f \tag{4}$$

dove ∇f e ∇g sono i vettori gradienti $\nabla f = (f_x, f_y)$ e $\nabla g = (g_x, g_y)$.

Nell'equazione vettoriale (4) non si possono dividere entrambi i membri per ∇g e ricavare in tal modo λ come in un'equazione di primo grado, perché non ha senso la divisione per un vettore. Trasformiamo allora la (4) in un'equazione numerica moltiplicando scalarmente entrambi i suoi membri per il vettore ∇g (si ricorda che il risultato del prodotto scalare, detto anche prodotto interno, di due vettori è un numero e non un vettore):

$$\lambda(\nabla g, \nabla g) = -(\nabla f, \nabla g) \tag{5}$$

A questo punto ricaviamo λ dalla (5) che è un'equazione di primo grado in λ:

$$\lambda = -\frac{(\nabla f, \nabla g)}{(\nabla g, \nabla g)} = -\frac{(\nabla f, \nabla g)}{||\nabla g||^2} \tag{6}$$

Viene lasciata per esercizio la verifica che moltiplicando scalarmente ambo i membri della (4) per ∇f, si ottiene un'espressione di λ equivalente alla (6) che è

$$\lambda = -\frac{(\nabla f, \nabla f)}{(\nabla g, \nabla f)} = -\frac{||\nabla f||^2}{(\nabla g, \nabla f)}$$