ESERCITAZIONE SU CALCOLO MATRICIALE, APPLICAZIONI LINEARI E FORME QUADRATICHE

1 Calcolo matriciale

Il problema che vogliamo affrontare è quello di introdurre un'operazione di prodotto fra due date matrici A e B aventi elementi rispettivamente (a_{ij}) e (b_{ij}). Dopo aver scelto l'ordine $A \cdot B$ per il prodotto e dopo aver verificato che la quantità di colonne della prima matrice A è uguale al numero di righe della seconda matrice B, allora otteniamo l'elemento h, k nella matrice prodotto delle due matrici applicando il metodo detto *righe per colonne*

$$(A \cdot B)_{hk} := a_{h1}b_{1k} + a_{h2}b_{2k} + a_{h3}b_{3k} + ... + a_{hn}b_{nk}$$

Dopo aver scelto una certa riga nella prima matrice A (la riga *h-esima*) e una certa colonna nella seconda matrice B (la colonna *k-esima*), allora l'elemento h, k della matrice prodotto si ottiene sommando tutti i prodotti ottenuti moltiplicando il primo elemento della riga scelta per il primo elemento della colonna scelta, il secondo elemento della riga scelta per il secondo elemento della colonna scelta e così via fino alla moltiplicazione dell'ultimo elemento della riga scelta per l'ultimo elemento della colonna scelta.

1.1 Primo esempio

Eseguiamo il prodotto $A \cdot B$ tra le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché la prima matrice possiede 3 colonne e la seconda matrice 3 righe, il prodotto righe per colonne nell'ordine $A \cdot B$ può essere calcolato e fornisce come risultato la matrice (che possiamo denominare C)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 & -1 \\ 19 & -13 & 15 & -4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che essendo la matrice A una matrice 2×3, A_{23}, e la matrice B una matrice 3×4, B_{34}, il loro prodotto è dato da una matrice 2×4, C_{24}, ovvero

$$A_{23} \cdot B_{34} = C_{24}$$

essendo, come si dice, *saturati* l'indice 3 di A e l'indice 3 di B.

Come si nota facilmente il prodotto con le matrici scambiate di posto non può essere eseguito perché dato l'ordine $B \cdot A$, in questo caso la prima matrice B possiede una quantità di colonne, 4, diversa dalla quantità di righe, 2, della seconda matrice A.

1.2 Secondo esempio

Eseguiamo il prodotto $A \cdot B$ tra le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché la prima matrice possiede 2 colonne e la seconda matrice 2 righe, il prodotto righe per colonne nell'ordine $A \cdot B$ può essere calcolato e fornisce come risultato la matrice (che possiamo denominare C)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che essendo la matrice A una matrice 2×2, A_{22}, e la matrice B una matrice 2×2, B_{22}, il loro prodotto è dato da una matrice 2×2, C_{22}, ovvero

$$A_{22} \cdot B_{22} = C_{22}$$

essendo *saturati* il secondo indice 2 di A e il primo indice 2 di B.

In questo caso, come si vede facilmente, si può eseguire anche la moltiplicazione con le matrici scambiate di posto $B \cdot A$, ma vediamo che il prodotto $B \cdot A$ è diverso dal prodotto $A \cdot B$, infatti

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 35 \\ -7 & -19 \end{pmatrix}$$

Alla luce dei due esempi presentati possiamo dire allora che date due matrici A e B in modo che si possa eseguire il prodotto $A \cdot B$, segue in generale che il prodotto con le matrici scambiate di posto $B \cdot A$ o non si può eseguire, oppure, se si può eseguire, è diverso dal prodotto $A \cdot B$: esprimiamo questa situazione dicendo che il prodotto fra matrici in generale non è *commutativo* perché si ha $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Vi sono comunque delle condizioni su A e B che rendono il prodotto commutativo, ma non ci interessano nel nostro ambito.

Riguardo al prodotto righe per colonne fra matrici, concludiamo aggiungendo che esso, sebbene non sia in generale commutativo, gode *almeno* della proprietà *associativa* che è quella che permette che tale prodotto venga utilizzato nella teoria dei vettori.

In virtù della proprietà associativa, abbiamo che date tre matrici A, B e C in un certo ben preciso ordine, per il loro prodotto vale la relazione

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

ovvero non è *importante* quale sia la coppia di matrici *vicine* con cui si comincia ad eseguire il prodotto delle tre matrici e purché il prodotto della coppia scelta per prima venga trascritto nello stesso posto occupato dalle due matrici che lo hanno generato, si ottiene lo stesso risultato: se si esegue prima la moltiplicazione $A \cdot B$, il loro prodotto va scritto alla sinistra di C; se si esegue prima la moltiplicazione $B \cdot C$, il loro prodotto va trascritto alla destra di A.

1.3 Terzo esempio

Eseguiamo il prodotto $A \cdot B$ tra le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Poiché la prima matrice possiede 3 colonne e la seconda matrice 3 righe, il prodotto righe per colonne nell'ordine $A \cdot B$ può essere calcolato e fornisce come risultato la matrice (che possiamo denominare C)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che essendo la matrice A una matrice 3×3, A_{33}, e la matrice B una matrice 3×1, B_{31}, il loro prodotto è dato da una matrice 3×1, C_{31}, ovvero

$$A_{33} \cdot B_{31} = C_{31}$$

essendo *saturati* il secondo indice 3 di A e l'indice 3 di B.

Abbiamo visto in questo esempio che un vettore (colonna) può essere considerato sempre come una matrice avente una sola colonna.

Quando la seconda matrice è, come in questo esempio, un vettore, allora il prodotto righe per colonne tra una matrice e un vettore viene anche chiamato *azione della matrice sul vettore*, come verrà illustrato tra breve nell'ambito della teoria delle applicaioni lineari.

1.4 Quarto esempio

Eseguiamo il prodotto $A \cdot B$ tra le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Poiché la prima matrice possiede 3 colonne e la seconda matrice 3 righe, il prodotto righe per colonne nell'ordine $A \cdot B$ può essere calcolato e fornisce come risultato la matrice C

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.5 Quinto esempio

Eseguiamo il prodotto $A \cdot B$ tra le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché la prima matrice possiede 3 colonne e la seconda matrice 3 righe, il prodotto righe per colonne nell'ordine $A \cdot B$ può essere calcolato e fornisce come risultato la matrice C

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

1.6 Calcolo della matrice inversa

Nel quarto e nel quinto esempio il risultato della moltiplicazione $A \cdot B$ è stato coincidente, come si si osserva, con la matrice B. Possiamo dire quindi che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che denomineremo *matrice identità* e indicheremo con il simbolo I, è l'elemento neutro della moltiplicazione fra matrici perché il prodotto fra essa e una qualsiasi altra matrice B ha sempre come risultato la matrice B, ovvero vale la relazione

$$I \cdot B = B \cdot I = B$$

La matrice identità è dunque una matrice formata da tutti e soli 1 sulla diagonale principale e tutti 0 negli elementi fuori della diagonale principale. Inoltre essa è una matrice che nella moltiplicazione con un'altra matrice può essere scambiata di posizione senza che cambi il prodotto.

La matrice identità ha dunque nell'ambito della moltiplicazione fra matrici lo stesso ruolo che ha il numero 1 nella moltiplicazione ordinaria fra singoli numeri.

Utilizzeremo allora la matrice identità per introdurre il concetto di matrice inversa di una matrice data.

Definizione: data una matrice quadrata A, la matrice inversa di A, indicata con il simbolo A^{-1}, è una matrice tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Data una matrice quadrata A di ordine n, esiste una procedura generale per individuare la sua matrice inversa, ma per i nostri scopi ci occuperemo soltanto delle matrici di ordine 2. Nel caso di matrice di ordine 2, la procedura generale per trovare l'inversa si traduce in un "meccanismo" molto semplice.

Data la matrice di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la sua matrice inversa è data dalla matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Dall'espressione della mtrice inversa deduciamo immediatamente che la condizione che deve essere soddisfatta dalla matrice A perché esista la sua inversa, è che il determinante di A sia diverso da zero (altrimenti il determinante pari a zero non può essere scritto al denominatore!).

Inoltre osserviamo dal confronto fra le matrici A e A^{-1} che, essendo il determinante della matrice A diverso da zero, la sua inversa A^{-1} si costruisce moltiplicando l'inverso del determinante di A per una matrice che rispetto alla matrice A abbia gli elementi sulla diagonale principale scambiati e quelli sull'altra diagonale soltanto cambiati di segno. Ricordiamo infine che il prodotto di un numero per una matrice è pari ad una matrice avente tutti gli elementi moltiplicati per quel numero.

Come esempio, troviamo la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha determinante pari a -5 e la matrice A^{-1} è allora

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

e viene lasciata come esercizio la verifica che vale

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si rimanda al libro di testo il calcolo della matrice inversa di una matrice qualsiasi di ordine n mediante calcolo preliminare della matrice aggiunta.

Negli esempi che vedremo nei prossimi paragrafi utilizzeremo soltanto le matrici di ordine 2 per illustrare in modo semplice la teoria del cambio di base negli spazi vettoriali e gli effetti che tale cambio di bese produce sui singoli vettori e sulle applicazioni lineari.

In questa teoria compariranno delle matrici inverse, ma potremo concentrare l'attenzione sui concetti fondamentali senza "preoccuparci" troppo del problema tecnico di individuare tali matrici inverse, perché utilizzeremo il caso di matrici di ordine 2 e direttamente il metodo appena presentato per invertire queste matrici.

2 Cambi di base negli spazi vettoriali

Dato uno spazio vettoriale V, una base $\mathcal{B}$ di V è un insieme

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_n\}$$

di vettori appartenenti a V tali che

- essi siano linearmente indipendenti;
- essi siano, come si dice, un sistema di *generatori* di V, ovvero dato un qualsiasi vettore $\mathbf{u} \in V$, questo si possa esprimere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + ... + a_n\mathbf{v}_n$$

La quantità di vettori che compongono una base di V è un numero che chiameremo *dimensione* dello spazio vettoriale V.

Uno spazio vettoriale ha in generale infinite basi, ma tutte con la stessa quantità di vettori: se uno spazio vettoriale V ha dimensione n, allora un qualsiasi insieme di n vettori di V che siano linearmente indipendenti e generatori per V può essere utilizzato come base di V.

Soltanto dopo che in uno spazio vettoriale V è stata fissata una base si possono esprimere i vettori di quello spazio perché a questo punto le componenti di un vettore sono i coefficienti della combinazione lineare dei vettori di base che fornisce il vettore dato.

Consideriamo come esempio lo spazio vettoriale bi-dimensione $V \equiv S_2$ e in esso la base, detta *naturale*, formata dai due vettori

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dato adesso un generico vettore $\mathbf{u} \in S_2$, ad esempio

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

possiamo dire che il vettore $\mathbf{u}$ ha il seguente significato

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quando dovesse occorrere specificare inequivocabilmente la base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale è espresso un dato vettore $\mathbf{u}$ perché si stanno considerando più basi, allora verrà utilizzata la notazione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathcal{B}}$$

Allora ci attendiamo che un certo fissato vettore $\mathbf{u} \in S_2$ avrà certe componenti o altre a seconda di quale base è stata scelta in S_2 rispetto alla quale esprimere i vettori dello spazio.

2.1 Effetto del cambio di base su un vettore di uno spazio vettoriale

Il problema che vogliamo affrontare ora è quello di vedere come cambiano le componenti di un dato vettore $\mathbf{u} \in S_2$ quando in S_2 si passa da una base $\mathcal{B}$ ad una nuova base $\mathcal{B}'$ (cambiamento di base).

Consideriamo dunque in S_2 la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

e rispetto ad essa il vettore

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Se ora effettuiamo un cambiamento di base dalla data base $\mathcal{B}$ alla nuova base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

vogliamo individuare le nuove componenti (quelle rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$) dello stesso vettore $\mathbf{u}$.

Per risolvere il problema, scriviamo la matrice T, detta *matrice del cambiamento di base*, avente come colonne i coefficienti delle combinazioni lineari dei "vecchi" vettori di base che esprimono i nuovi vettori di base. In altre parole dobbiamo esprimere i due vettori della nuova base mediante combinazione lineare dei vettori della prima base ed incolonnare i coefficienti così trovati.

Come è facile ottenere risolvendo il sistema con i coefficienti incogniti, si ha

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A questo punto scriviamo la matrice T del cambiamento di base incolonnando i coefficienti trovati

$$T = \begin{pmatrix} 9/5 & 3/5 \\ -8/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è, per quanto detto in precedenza, la matrice

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} -1/5 & -3/5 \\ 8/5 & 9/5 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1/5 & -3/5 \\ 8/5 & 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ 8/3 & 3 \end{pmatrix}$$

Infine le componenti del vettore $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ si calcolano mediante la relazione (di cui è omessa la dimostrazione)

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}'} = T^{-1} \mathbf{u}_{\mathcal{B}} \tag{1}$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ 8/3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -19/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Per concludere l'esercizio, verifichiamo che i due vettori

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -19/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

sono lo stesso vettore rispetto a basi diverse. Si deve cioè verificare che

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sia uguale a

$$\frac{8}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{19}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché vale

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{19}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora possiamo concludere che

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -19/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

sono effettivamente lo stesso vettore che appare in due rappresentazioni diverse in quanto relative a due basi diverse.

2.2 Effetto del cambio di base su un'applicazione lineare

Un'applicazione da uno spazio vettoriale in un altro è una legge che ad vettore del primo spazio vettoriale associa un vettore del secondo spazio vettoriale.

In questa esercitazione considereremo soltanto applicazioni dallo spazio vettoriale S_2 in se stesso. Definiamo quindi il concetto di *linearità* ponendo la seguente

definizione: un'applicazione L con

$$L : S_2 \longrightarrow S_2$$

si dice *lineare* se per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_2$ e per ogni coppia di coefficienti $a, b \in \mathcal{R}$ vale la relazione

$$L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$$

Per scrivere l'espressione di un'applicazione lineare, occorre, per quanto detto in precedenza, fissare una base in S_2 in modo che le componenti di un vettore abbiano significato. Dopo che sia stata fissata una base, un'applicazione lineare prende forma e si *materializza* attraverso una matrice quadrata di ordine 2.

Per sapere come l'applicazione lineare trasforma tutti i vettori di S_2, basta sapere solamente come essa trasforma i due vettori della base scelta. Infatti, siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i due vettori di base scelti per S_2 e immaginiamo di conoscere i due vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ in cui vengono trasformati dall'applicazione lineare i due vettori di base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, cioè

$$L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 \qquad \text{e} \qquad L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$$

Se adesso vogliamo sapere in che vettore si trasforma un certo vettore dato $\mathbf{v}$, dobbiamo esprimere il vettore $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei due vettori di base

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

in modo che poi si possa calcolare

$$L(\mathbf{v}) = L(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = aL(\mathbf{v}_1) + bL(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$$

Quando si ha la matrice che rappresenta un'applicazione lineare relativamente ad una certa fissata base, l'*azione* dell'applicazione lineare sui vettori dello spazio S_2 si esercita quindi mediante il prodotto righe per colonne della matrice che rappresenta l'applicazione lineare e il vettore che di volta in volta si vuole trasformare.

Come esempio che mostri il modo in cui una matrice agisce su un vettore, consideriamo in S_2 la base naturale

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e l'applicazione lineare che relativamente a tale base è rappresentata dalla matrice

$$L = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Dire che l'applicazione lineare è riferita alla base data, vuol dire che i vettori che essa trasforma e i vettori che si ottengono come risultati, sono combinazione lineare dei vettori della base scelta. In particolare trasformiamo il vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

attraverso l'applicazione data: si ottiene il risultato $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w} = L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Per concludere, ripetiamo che in questo esempio i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, riferiti alla base data, sono da intendersi

$$\mathbf{v} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} = -34 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 14 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se e quando dovessero sorgere equivoci relativamente alle basi rispetto a cui un vettore e/o un'applicazione lineare sono espressi, allora, come in precedenza, si scriverà l'indice della base in basso a fianco al vettore e/o all'applicazione lineare.

Da quanto detto, si comprende che ad una medesima applicazione lineare corrispondono infinite rappresentazioni matriciali a seconda della base scelta di volta in volta. In altre parole, data un'applicazione lineare, ad ogni base scelta nello spazio vettoriale corrisponde una certa matrice che rappresenta l'applicazione lineare e quindi se si cambia base, cambierà anche la matrice che rappresenta l'applicazione lineare.

La questione che vogliamo adesso discutere brevemente è quella di trovare la nuova matrice che rappresenta una data applicazione lineare quando si effettua un cambiamento di base.

Come esempio, consideriamo per semplicità la base naturale e, relativamente ad essa, la stessa applicazione naturale dell'esempio precedente

$$L = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Effettuiamo ora il cambio dalla base naturale data $\mathcal{B}$ alla nuova base $\mathcal{B}'$

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

e calcoliamo la matrice di tale cambio di base. Procedendo come in precedenza, si debbono esprimere i vettori della nuova base come combinazione lineare dei vettori della "vecchia" base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice del cambiamento di base assume allora la forma

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

avente inversa

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice L' che rappresenta la stessa applicazione lineare relativamente alla nuova base $\mathcal{B}'$ è data dalla relazione di cui viene omessa la dimostrazione

$$L' = T^{-1} L T$$

Ricaviamo quindi

$$L' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -22 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto in definitiva che le due matrici

$$L = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad L' = \begin{pmatrix} -8 & -22 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

rappresentano la medesima applicazione lineare rispetto a basi diverse.

Per comprendere meglio cosa significa che matrici diverse corrispondono alla medesima applicazione lineare, facciamo agire le due matrici sullo stesso vettore che però scriveremo rispetto alla stessa base rispetto alla quale è data anche la rappresentazione dell'applicazione lineare.

Consideriamo per esempio il vettore rispetto alla base naturale $\mathcal{B}$ data come prima base

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

e calcoliamo la sua espressione (le sue componenti!) rispetto alla nuova base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Per calcolare le componenti dello stesso vettore rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$, eseguiamo, utilizzando la matrice del cambiamento di base già trovata in precedenza,

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}'} = T^{-1}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 17 \\ -12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Detto che le due rappresentazioni

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 17 \\ -12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

esprimono il medesimo vettore nelle basi rispettivamente $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, se utilizziamo la rappresentazione L dell'applicazione lineare, allora faremo agire l'applicazione sulla rappresentazione $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ del vettore, mentre se utilizziamo la rappresentazione L' dell'applicazione lineare, allora faremo agire l'applicazione sulla rappresentazione $\mathbf{v}_{\mathcal{B}'}$ del vettore.

Qualunque sia la rappresentazione che utilizziamo, ovvero qualunque sia la base rispetto a cui consideriamo l'applicazione lineare e il vettore, purché la rappresentazione dell'applicazione lineare agisca sulla rappresentazione corrispondente del vettore, si debbono ottenere i medesimi risultati, riferiti ovviamente a basi diverse.

Abbiamo allora

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 50 \\ 22 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

e

$$\begin{pmatrix} -8 & -22 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 17 \\ -12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 128 \\ -78 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

E poiché infine abbiamo l'equivalenza fra i due vettori ottenuti come risultati

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 22 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 128 \\ -78 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

in quanto vale, come è facile vedere,

$$\begin{pmatrix} 128 \\ -78 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = T^{-1} \begin{pmatrix} 50 \\ 22 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 22 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

allora concludiamo che le due rappresentazioni dell'applicazione lineare forniscono risultati fra loro equivalenti quando agiscono su rappresentazioni fra loro equivalenti del medesimo vettore e dunque le due rappresentazioni L e L' corrispondono alla medesima applicazione lineare, come volevamo verificare.

Quando si passa dunque da una base $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{B}'$, l'applicazione lineare che rispetto a $\mathcal{B}$ ha rappresentazione L, assumerà rispetto a $\mathcal{B}'$ una rappresentazione L' che non si può "indovinare" senza eseguire il calcolo $L' = T^{-1}LT$. Quindi solo al termine di tale moltiplicazione fra matrici si ottiene la nuova rappresentazione dell'applicazione lineare.

C'è però un caso in cui, in virtù di un teorema che non dimostreremo, anche senza eseguire la moltiplicazione $T^{-1}LT$, si può scrivere immediatamente la rappresentazione L' rispetto alla nuova base: è il caso in cui il cambio di base viene effettuato non verso una base qualsiasi, ma verso la base composta dagli autovettori della rappresentazione relativa alla "vecchia" base. In questo caso allora la rappresentazione relativa a questa nuova base è, come si dice, *diagonale*, con gli autovalori corrispondenti agli autovettori di base sulla diagonale principale e tutti zeri fuori di essa.

Diagonalizzare un'applicazione lineare significa quindi passare dalla base data alla base costituita dagli autovettori dell'applicazione assegnata relativa a alla prima base.

Riguardo all'applicazione già assegnata relativa alla base naturale $\mathcal{B}$

$$L = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

abbiamo trovato la nuova rappresentazione rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$. Tale nuova rappresentazione non è diagonale perché la nuova base $\mathcal{B}'$ è una base "generica".

Essendo gli autovettori della matrice L (si lascia per esercizio il loro calcolo)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

relativi agli autavalori rispettivamente $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 3$, abbiamo che se passiamo dalla base naturale $\mathcal{B}$ alla nuova base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

formata dagli autovettori di L, allora si ottiene la nuova rappresentazione (si lascia per esercizio tale calcolo!)

$$L' = T^{-1} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che appunto è diagonale.

Per concludere si sottolinea che diagonalizzare non significa trovare questa matrice diagonale, ma semplicemente passare alla base degli autovettori perché relativamente a tale base il teorema già menzionato assicura che la rappresentazione dell'applicazione lineare è diagonale.

Non si faccia pertanto confusione fra i due concetti che sono passare alla base degli autovettori (diagonalizzazione) e scrivere la matrice finale diagonale!

3 Forme quadratiche

Analizzeremo soltanto forme quadratiche di due variabili, essendo immediata e molto semplice la loro generalizzazione alle forme quadratiche di n variabili.

Definizione: una *forma quadratica* $Q(x, y)$ delle due variabili x, y è il polinomio omogeneo di secondo grado

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Per i nostri scopi, considereremo soltanto il caso di forme quadratiche per le quali valga

$$b^2 - 4ac \neq 0 \tag{2}$$

Il problema che ci si pone relativamente alle forme quadratiche è quello di stabilire il segno dei risultati ottenuti dal polinomio al variare delle coppie di valori attribuiti alle sue due variabili.

In particolare diremo che la forma quadratica è

- *definita positiva* se i risultati forniti da $Q(x, y)$ sono sempre positivi per ogni coppia di valori attribuiti a (x, y);
- *definita negativa* se i risultati forniti da $Q(x, y)$ sono sempre negativi per ogni coppia di valori attribuiti a (x, y);
- *indefinita* se i risultati forniti da $Q(x, y)$ sono negativi per alcune coppie di valori attribuiti a (x, y) e positivi per altre coppie.

Se nel polinomio $Q(x, y)$ si avesse $b = 0$, cioè non ci fosse il termine *misto* xy, sarebbe immediato rispondere alla domanda di che segno siano i risultati generati dal polinomio. In tal caso infatti avremmo soltanto tre possibilità corrispondenti appunto alle tre combinazioni dei segni dei coefficienti dei quadrati, dal momento che nei nostri casi la condizione (2) esclude che la forma quadratica contenente solo i quadrati abbia un quadrato con coefficiente nullo.

In particolare possiamo dire che:

- la forma quadratica $Q(x,y) = ax^2 + cy^2$, con $a, c > 0$, è evidentemente *definita positiva* perché i risultati forniti da $Q(x,y)$ sono sempre positivi per ogni coppia di valori attribuiti a (x,y);

- la forma quadratica $Q(x,y) = ax^2 + cy^2$, con $a, c < 0$, è evidentemente *definita negativa* perché i risultati forniti da $Q(x,y)$ sono sempre negativi per ogni coppia di valori attribuiti a (x,y);

- la forma quadratica $Q(x,y) = ax^2 + cy^2$, con a, c discordi in segno, è evidentemente *indefinita* perché i risultati forniti da $Q(x,y)$ in corrispondenza delle coppie $(1,0)$ e $(0,1)$ sono uno positivo e l'altro negativo, come è immediato verificare direttamente.

Per stabilire come si "comporta" la forma quadratica dal punto di vista del segno dei risultati forniti nel caso generale in cui sia $b \neq 0$, associamo preliminarmente ad essa la matrice simmetrica

$$Q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

ottenuta scrivendo i coefficienti dei due quadrati x^2 e y^2 sulla diagonale principale e la metà del coefficiente del termine *misto* xy al posto dei due elementi dell'altra diagonale (per semplicità di notazione indichiamo con il simbolo Q sia la forma quadratica, sia la matrice ad essa associata).

Osserviamo inoltre che la matrice Q così costruita è una matrice simmetrica di ordine 2 per la quale valgono le proprietà già introdotte relativamente alle matrici hessiane del secondo ordine.

A questo punto, poiché la condizione (2) impedisce che la matrice Q abbia un autovalore nullo, abbiamo tre situazioni corrispondenti ai tre casi di comportamento della forma quadratica:

- se gli autovalori della matrice Q sono entrambi positivi, allora la forma quadratica $Q(x,y)$ associata a Q è *definita positiva*;

- se gli autovalori della matrice Q sono entrambi negativi, allora la forma quadratica $Q(x,y)$ associata a Q è *definita negativa*;

- se gli autovalori della matrice Q sono discordi in segno, allora la forma quadratica $Q(x,y)$ associata a Q è *indefinita*.

Il motivo per cui quest'analisi degli autovalori conduce al "comportamento" della forma quadratica completa è che con un opportuno cambio di base, del quale omettiamo i dettagli, la forma quadratica generale

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

è sempre riconducibile ad un'altra forma quadratica priva del termine misto, ovvero del tipo

$$\bar{Q}(x', y') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2$$

con λ_1, λ_2 autovalori della matrice Q.

Non è sorprendente allora che i tre casi dei segni degli autovalori della matrice Q corrispondano ai tre casi, appena discussi, dei segni dei coefficienti a, c dei quadrati quando "manca" il termine misto xy.

Nel caso di forme quadratiche con due variabili

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

in cui valga la condizione (2), il comportamento può essere stabilito mediante una più immediata osservazione della matrice Q. In particolare si ha:

- se il determinante della matrice Q è negativo, allora la forma quadratica $Q(x, y)$ è *indefinita*;
- se il determinante della matrice Q è positivo e i coefficienti a, c sono positivi, allora la forma quadratica $Q(x, y)$ è *definita positiva*;
- se il determinante della matrice Q è positivo e i coefficienti a, c sono negativi, allora la forma quadratica $Q(x, y)$ è *definita negativa*.

3.1 Primo esempio

Studiare il comportamento della seguente forma quadratica

$$Q(x, y) = 2x^2 - 5xy + 4y^2$$

La matrice simmetrica associata alla forma quadratica proposta è

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 4 \end{pmatrix}$$

e i coefficienti a, c dei quadrati sono rispettivamente 2 e 4.

Poiché si ha

$$\det Q = \frac{7}{4} > 0$$

e i coefficienti a, c sono entrambi positivi, allora la forma quadratica è *definita positiva*.

3.2 Secondo esempio

Studiare il comportamento della seguente forma quadratica

$$Q(x, y) = -3x^2 + 3xy - y^2$$

La matrice simmetrica associata alla forma quadratica proposta è

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

e i coefficienti a, c dei quadrati sono rispettivamente -3 e -1.

Poiché si ha

$$\det Q = \frac{3}{4} > 0$$

e i coefficienti a, c sono entrambi negativi, allora la forma quadratica è *definita negativa*.

3.3 Terzo esempio

Studiare il comportamento della seguente forma quadratica

$$Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$$

La matrice simmetrica associata alla forma quadratica proposta è

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché si ha

$$\det Q = -\frac{1}{4} < 0$$

allora la forma quadratica è *indefinita*.