

NOTA BENE: gli esercizi senza asterisco riportano il solo risultato, quelli con asterisco contengono un commento alla soluzione ed il risultato (il tutto alla fine dei problemi).

Le soluzioni nel foglio Excel dovranno riportare prima i dati di partenza poi le formule necessarie ai calcoli con un opportuno commento (si veda nella figura sottostante, un esempio relativo all'esercizio 1, in cui è riportata anche nell'omonima barra la formula che calcola il risultato). In questo modo qualunque variazione sui dati originali si rifletterà automaticamente sui risultati.

AGGIORNAMENTO 26 marzo 2020

1. (\*)Calcolare il fattore di capitalizzazione per 100 unità di capitale che investite all'epoca  $x$  hanno fruttato, all'epoca  $y$ , un montante di 102,5.

	A	B	C	D
1	100	CAPITALE		
2	102.5	MONTANTE		
3	1.025	$r(x,y)$ FATTORE DI CAP.NE		
4				
5				
6				
7				

2. Ricevo oggi 90 unità di capitale impegnandomi a renderne 100 in un'epoca successiva. Si calcoli il fattore di attualizzazione.

3. Nel problema 1 abbiamo calcolato il fattore di capitalizzazione. Calcolare, in base a quei dati: fattore di attualizzazione, tasso effettivo di interesse, tasso effettivo di sconto.

4. Nel problema 2 abbiamo calcolato il fattore di attualizzazione. Calcolare, in base a quei dati: fattore di capitalizzazione, tasso effettivo di interesse, tasso effettivo di sconto.

5. Si deve corrispondere alla scadenza  $y$  un importo di 100 unità. Il tasso effettivo di interesse è del 2,5%. Si determini, all'epoca  $x$ , la somma da anticipare, lo sconto, il tasso effettivo di sconto di questa operazione finanziaria.

6. (\*)Il 31 gennaio 2016 (epoca  $y$ ) ho la disponibilità di 100 unità di capitale. Cedo questa disponibilità in cambio di 98 il 15 novembre 2015 (epoca  $x$ ). Ipotizzando che il fattore di attualizzazione rimanga

invariato, calcolare all'epoca  $x$  il valore attuale dei seguenti capitali disponibili all'epoca  $y$ : 54, 12, 604, 94, 3154, 940.

7. Il capitale  $C$  viene impiegato per un certo numero di anni all'interesse composto annuo dell'8%. Si calcoli il tasso semestrale equivalente.

8. (\*) Il capitale  $C$  viene impiegato per un certo numero di anni all'interesse composto bimestrale dell'1,25%. Qual è il tasso trimestrale equivalente?

9. (\*) Si ha la possibilità di investire un importo:

- per tre mesi al tasso periodale  $i(0,3)$  dell'1,85%;
- per tre mesi e 10 giorni al tasso periodale  $i(0,3.3\dots)$  del 2,03%.

Qual'è tra le due operazioni quella più conveniente?

10. Pago oggi 87,6 unità che mi assicurano la disponibilità di 100 unità tra tre anni. Qual è il tasso annuale dell'operazione finanziaria?

11. Il tasso effettivo di interesse quadrimestrale è pari all'1,8%. Determinare il tasso trimestrale, il tasso semestrale e quello annuale equivalenti al tasso dato.

12. Si investe per tre anni e due mesi, in regime di capitalizzazione composta, un importo di 1500 unità al tasso effettivo annuo del 4,7%. Calcolare il montante, il fattore di attualizzazione, il tasso di interesse ed il tasso di sconto periodali relativi alla durata dell'operazione.

13. (\*) Ipotizzando di trovarsi in regime finanziario di capitalizzazione composta, si calcoli il tasso nominale convertibile  $m$  volte l'anno  $j(m)$  per un frazionamento semestrale ( $m = 2$ ), quadrimestrale ( $m = 3$ ), trimestrale ( $m = 4$ ), mensile ( $m = 12$ ), equivalenti al tasso effettivo annuo di interesse del 5%.

13.1. Come il problema 13 ma le celle  $G_1, G_2, G_3, G_4$ , contengono rispettivamente il tasso di interesse annuo del 4%, 3%, 2%, 1%. Per la soluzione modificare opportunamente la formula in  $F_3$  in modo da copiarla nell'intervallo  $F_3:G_9$ .

14. Un capitale di 150 unità, investito in regime di capitalizzazione composta, produce dopo 6 anni e 9 mesi un montante di 212. Calcolare il tasso mensile, trimestrale, annuale, periodale ovvero a 6 anni

e 9 mesi che hanno regolato l'operazione finanziaria. Calcolare poi il tasso nominale di interesse convertibile trimestralmente.

15. Un'operazione di investimento richiede un capitale iniziale di 25000 unità che, impiegato in regime di capitalizzazione composta per 10 anni e 6 mesi produce un montante di 45000. Calcolare il tasso effettivo annuo dell'operazione nonché il tasso trimestrale ed il tasso nominale di interesse convertibile 3 volte l'anno equivalenti al tasso annuo calcolato.

16. (\*)Determinare in quanto tempo 5600 unità di capitale, hanno prodotto un montante di 8567 essendo stati capitalizzati al tasso di interesse del 5% annuo in regime di capitalizzazione composta.

17. (\*)Determinare il valore attuale di 1000 unità di capitale esigibile fra 4 anni e 2 mesi al tasso quadrimestrale dell'1,8% in capitalizzazione composta.

18. Calcolare il tasso di sconto trimestrale in regime di capitalizzazione composta equivalente al tasso di sconto annuo del 6%.

19. Dato il tasso  $i_{\frac{1}{4}} = 1,5\%$ , calcolare il corrispondente tasso nominale convertibile quattro volte l'anno. Fatto questo dimostrare con un esempio numerico che:  $j(m) = m \cdot i_{\frac{1}{m}} < i$  ( $m \neq 1$ )

20. Si investono in regime di capitalizzazione composta 1500 unità di capitale per 18 mesi al tasso nominale di interesse convertibile mensilmente  $j(12) = 5,5\%$ . Calcolare il montante ed il tasso effettivo annuo di interesse equivalente.

21. Il tasso di interesse nominale convertibile 4 volte l'anno è pari al 9,65%, calcolare la forza di interesse.

22. Il tasso nominale di sconto convertibile 4 volte l'anno  $\rho(4) = 8\%$ . Determinare nell'ordine: - tasso di sconto annuale; - tasso di sconto quadrimestrale; - tasso di interesse annuale; - tasso istantaneo di sconto (a partire dal tasso di sconto annuale); - tasso istantaneo di interesse (a partire dal tasso di interesse annuale); - tasso nominale di interesse convertibile 4 volte l'anno; - tasso di interesse semestrale.

23. Un capitale di 1850 unità viene investito in capitalizzazione composta per 4 anni e 3 mesi producendo un montante di 5000. Calcolare il tasso di interesse annuo ed il tasso nominale convertibile semestral-

mente.

24. (\*)Una cambiale a tre mesi frutterà a scadenza 1500. Vogliamo presentare oggi, a due mesi dalla scadenza, la cambiale allo sconto sapendo che la banca applica la capitalizzazione composta al tasso annuo di interesse del 26%. Quanto incasseremo oggi?

Si consiglia di disegnare sullo scadenziario l'operazione finanziaria.

25. Si determini il valore attuale ed il montante di una rendita di durata pari a 5 anni con rate annuali posticipate di 1000 unità al tasso annuo di interesse dell'8,25%.

26. (\*)In relazione al problema precedente ipotizzare che le rate vengano pagate ogni semestre.

27. Determinare quanti anni occorrono per estinguere un debito di 7000 unità al tasso effettivo di interesse annuo del 6,5%, pagando una rata annuale posticipata di 600.

28. (\*)Una rendita annua è costituita da 15 rate posticipate di 1180. Si calcoli il montante alla scadenza dell'ultima rata. Il tasso di interesse annuale è del 5%.

29. (\*)Una rendita di 15 rate annue anticipate di 1500 al tasso di interesse annuale dell'8,18%. Si valuti il montante della rendita l'anno successivo la scadenza dell'ultima rata.

30. (\*)Una rendita semestrale posticipata è costituita da 18 rate di 2400 unità. Si calcoli il valore attuale della rendita due anni prima il pagamento della prima rata. Il tasso di interesse è dell'8% annuo.

31. Con i dati del problema precedente, si valuti il montante tre mesi dopo il pagamento dell'ultima rata.

32. Un istituto di credito ha concesso ad un cliente un prestito di 178000 unità da restituire in 6 rate annuali costanti posticipate al tasso effettivo annuo del 6%. Si chiedono gli elementi del piano al secondo anno ed il debito residuo al terzo anno.

33. Un prestito di 120000 si rimborsa in 8 anni con un ammortamento a rate trimestrali costanti posticipate al tasso annuo effettivo del 6,20%. Si determini la rata trimestrale costante e gli importi del 29-esimo periodo.

34. Quanti anni occorrono per costituire un capitale di 10000 unità versando una rata posticipata di 600 l'anno nell'ipotesi che il tasso di interesse effettivo annuo sia del 10%. Qualora il numero di anni fosse decimale, calcolare il numero di mesi ed il numero di giorni.

35. (\*)Si consideri una rendita biennale di rata costante bimestrale anticipata di 85 unità. Il tasso di interesse trimestrale è del 2,3%. Si deve valutare finanziariamente il montante alla fine dei due anni tenendo presente che non sono state corrisposte la terza e la settima rata.

## SOLUZIONI

1.  $r(x, y) = 1,025$ .

2.  $v(x, y) = 0,90$ .

3.  $v(x, y) = 0,9756$ ;  $i(x, y) = 0,025$ ;  $d(x, y) = 0,02439$ .

4.  $r(x, y) = 1,111\dots$ ;  $i(x, y) = 0,111\dots$ ;  $d(x, y) = 0,10$ .

5.  $C = 97,561$ ;  $D(x, y) = 2,439$ ;  $d(x, y) = 0,02439$ .

6. La soluzione di questo problema è riportata in Excel nella figura sottostante.

Tutti i valori attuali sono stati calcolati con la stessa formula scritta in D6 ed evidenziata nel riquadro verde.

La formula è stata copiata nell'intervallo di celle D6:I6. Si nota l'uso del carattere '\$' davanti al nome della colonna C che nella copia ne blocca il riferimento.

I risultati sono visibili nella riga 6 in corrispondenza di ciascun montante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4									
5		montante	100	54	12	604	94	3154	940
6		capitale	98	52,92	11,76	591,92	92,12	3090,92	921,2
7									
8		v(x,y)	0,98						
9					=D5*\$C8				

7.  $i_{\frac{1}{2}} = 3,923\%..$

8. Nella figura riportiamo la soluzione generalizzata al problema del calcolo di un tasso equivalente.

Rappresentando l'esponente cui elevare il tasso iniziale sotto forma di frazione (comunque possibile), lo inseriamo nelle due celle B3 e B4, rispettivamente numeratore e denominatore di questa frazione. Fatto questo, avendo scritto il tasso da convertire in B1, avremo in automatico il calcolo del tasso equivalente nella cella B6.

Nella figura vediamo:

- i dati di partenza, celle B1, B3, B4;
- i risultati dei calcoli con le formule nelle celle B2, B5, B6;
- (solo per ragioni grafiche) il testo delle formule nelle tre celle adiacenti C2,C3,C6.

La soluzione di questo problema si ottiene elevando alla potenza  $3/2$  il tasso di partenza, incrementato di 1. Il numeratore della frazione (3) calcola il tasso semestrale equivalente; infatti un semestre è il triplo di un bimestre. Il denominatore (2) calcola il tasso trimestrale equivalente a quello semestrale; infatti un trimestre è pari ad  $1/2$  di un semestre.

Nel prosieguo ci riferiremo a questo foglio Excel con l'appellativo di *calcolatore del tasso equivalente*.

	A	B	C	D
1	tasso iniziale	1,25%		
2	(1+tasso iniziale)	1,01	=C1+1	
3	n esp.	3		
4	d esp.	2		
5	(1+tasso iniziale)^(n/m)	1,018808472	=C2^(C3/C4)	
6	tasso equivalente	1,8808%	=C5-1	
7				
8				

9. Il problema si risolve riportando i due tassi ad un tasso comune in modo da poterli confrontare; scegliamo di effettuare il confronto calcolando il tasso annuale equivalente.

Utilizziamo il calcolatore del tasso equivalente inserendo i tre dati richiesti.

In particolare per la frazione che rappresenta l'esponente, celle B3, B4 abbiamo che:

- il tasso periodale a 3 mesi si trasforma in annuale elevando ad una potenza di  $4/1$ , da cui un tasso annuale del 7,61%;
- il tasso periodale a 3 mesi e 10 giorni si trasforma in tasso annuale elevando alla potenza  $360/100$ , da cui un tasso annuale del 7,51%.

L'operazione più redditizia è la prima essendo maggiore il tasso equivalente annuale.

10.  $i = 4,51\%$ .

11.  $i = 5,49\%$ ;  $i_{\frac{1}{4}} = 1,35\%$ ;  $i_{\frac{1}{2}} = 2,71\%$ .

12. Il montante si può calcolare senza trasformazione del tasso da annuale a bimestrale. Per questo bisogna definire l'esponente del fattore di capitalizzazione come  $4 + (1/6)$ .

$M = 1734,825$ ;  $v(t) = 0,8646$ ;  $i(t) = 15,66\%$ ;  $d(t) = 13,54\%$ .

13. Nella figura è visibile la soluzione con il programma Excel che applica la formula:

$$j(k) = k \cdot [(1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1]$$

che, tradotta in Excel, è stata inserita nella cella F3 (visibile nella barra omonima). Utilizza sia il tasso di interesse annuo (F1), che il frazionamento (colonna E). La sua copia, nell'intervallo F4:F9 calcola i tassi annui convertibili  $m$  volte l'anno equivalenti al tasso del 5% annuo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				frazionam.	(k)	5%		
2								
3				annuale	1	5,0000%		
4				semestrale	2	4,9390%		
5				quadrimestrale	3	4,9189%		
6				trimestrale	4	4,9089%		
7				mensile	12	4,8889%		
8				settimanale	52	4,8813%		
9				giornaliero	360	4,8793%		
10				continuo	INFINITO	4,8790%		
11								
12								

14. mensile=0,42%; trimestrale=1,28%; annuale=5,25%;  $6aa,9mm=41,3\%$ ;  $j(4) = 5,12\%$ .

15.  $i = 5,76\%$ ;  $i_{\frac{1}{4}} = 1,41\%$ ;  $j(3) = 5,65\%$ .



16. Nella cella A8 è stata scritta l'equivalente Excel della formula:

$$n = \frac{\log M - \log C}{\log(1 + i)}$$

Si nota che, essendo il tasso di interesse dell'of un tasso annuale, il risultato della formula è anch'esso un numero di anni.

Per la trasformazione della parte decimale in mesi e giorni è stato calcolato il risultato della sottrazione tra il numero originale e la sua parte intera.

In questo modo si è ottenuta la parte decimale che è stata moltiplicata in A9 per 12 per ottenere i mesi corrispondenti; lo stesso è stato fatto in A10, moltiplicando la parte decimale per 30 per ottenere i giorni. 8 anni, 8 mesi, 17 giorni.

	A	B	C
1	5600	CAPITALE	
2	8567	MONTANTE	
3	0,05	TASSO DI INTERESSE ANNUALE	
4	1,05	1+i	
5	3,748188027	log(C)	
6	3,932828767	log(M)	
7	0,021189299	log(1+i)	
8	8,713867282	numero periodi	anni
9	8,57	=(A8-INT(A8))*12	mesi
10	16,99	=(A9-INT(A9))*30	giorni
11			
12			

17. Il fattore di attualizzazione con i tasso quadrimestrale si calcola con:

$$v(t) = \frac{1}{(1+i)^{\frac{25}{2}}}$$

$$C = 800,1156.$$

$$18. d_{\frac{1}{4}} = 1,53\%.$$

$$19. i = 6,14\% > j(4) = 6\%.$$

$$20. M = 1628,68; i = 5,64\%.$$

$$21. \delta = 9,534\%.$$

$$22. d = 7,76\% \dots; d_{\frac{1}{3}} = 2,65\% \dots; i = 8,41\% \dots; \rho = \delta = 8,081\%;$$

$$j(4) = 8,16\% \dots; i_{\frac{1}{2}} = 4,12\% \dots.$$

$$23. i = 26,3\% \dots; j(2) = 24,82\%.$$

24. Si deve anticipare di due mesi il capitale di 1500 al tasso annuo del 26%. Pertanto il valore attuale si ottiene dalla formula:

$$C = M \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{6}}}$$

$$C = 1443,32 \dots$$

25.  $A_T = 3966,54$ ;  $S_T = 5895,92$ .

26. Rispetto alla soluzione precedente bisogna:

- trasformare il tasso annuale in tasso semestrale;

- considerare che le rate sono 10.

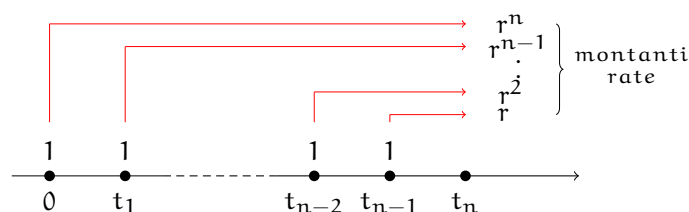
$$A_T = 8093,457$$
;  $S_T = 12030,22$ .

27. 22 anni, 6 mesi, 18,91 giorni.

28. Nella rendita posticipata il pagamento dell'ultima rata coincide con la valutazione del montante (consultare, negli appunti il montante di una rendita posticipata...).

$$S_T = 25462,71$$
.

29. Riportiamo lo scadenziario relativo al calcolo del montante di una rendita anticipata. Come si può vedere, la valutazione della rendita è già effettuata un periodo dopo il pagamento dell'ultima rata. Pertanto il risultato richiesto coincide con il calcolo del montante di una rendita anticipata etc.

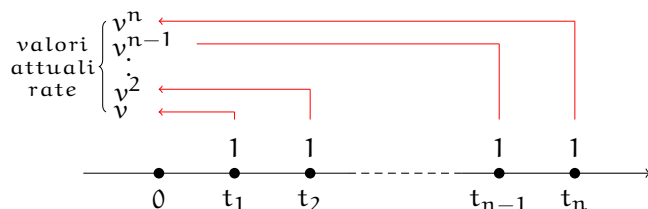


Pertanto essendo:

$$\ddot{S}_T = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

avremo  $M = 44681,88$ .

30. In questo problema la rendita è posticipata e dobbiamo valutare il valore attuale. Come nel caso precedente è utile disporre del corrispondente scadenziario per capire come procedere nei calcoli.



Come possiamo vedere, la prima rata viene pagata un semestre prima rispetto alla data di valutazione del valore attuale della rendita. Di conseguenza la valutazione che precede di due anni la prima scadenza, dovrà attualizzare il valore capitale di tre semestri.

Bisognerà pertanto calcolare:

- il tasso semestrale equivalente  $i_{\frac{1}{2}} = 3,923\%$ ;
- il valore attuale di una rendita posticipata semestrale  $A_T = 30573,35$ ;
- il valore attuale  $C = \frac{A_T}{(1+i)^{\frac{3}{2}}} = 27240,0183$ .

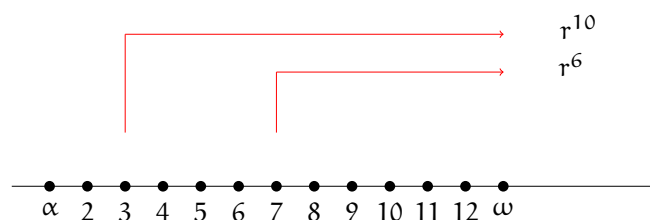
31.  $S_T = 61115,75$ ;  $M = S_T \cdot (1 + 0,08)^{\frac{3}{12}}$ .

32.  $R = 36198,55$ ;  $C2 = 27049,66$ ;  $I2 = 9148,887$ ;  $D2 = 125431,8$ ;  $E2 = 52568,21$ ;  $D3 = 96759,15$ .

33.  $i_{\frac{1}{4}} = 1,5152\%$ ;  $R = 4760,09$ ;  $C29 = 4482,20$ ;  $I29 = 277,894$ ;  $D2913858,22$ ;  $E29106141,8$ .

34. anni=10,29092

35. Lo scadenziario di riferimento è riportato nella figura sottostante. I numeri si riferiscono al progressivo della rata mentre  $\alpha$  e  $\omega$  sono le epoche cui si riferiscono il calcolo del valore attuale e del montante. Dal momento che la rendita è anticipata, la prima rata viene pagata all'epoca  $0 = \alpha$ , la seconda all'epoca 1, etc. Le linee rosse indicano le due rate non pagate e, accanto, i rispettivi fattori di capitalizzazione.



Una volta trovato il tasso di interesse bimestrale equivalente a quello dato  $i_{bim} = 1,5275\%$ , si calcola il montante della rendita  $S_T = 1127,168$ . I valori, alla stessa epoca cui si riferisce la valutazione della rendita, delle due rate non pagate sono rispettivamente 98.913 e 93,093 da cui si ottiene il valore cercato di 935,160.