Ciclo di seminari: Metodi Computazionali per la Finanza

C.d.L.M. Finanza e Assicurazioni – a.a. 2018/2019

Lezione 2: Alberi Binomiali

Modelli binomiali

- **Modello binomiale additivo:**

$$G_n = \begin{cases} a \in \mathbb{R}, & \text{con prob. } p \\ b \in \mathbb{R}, & \text{con prob. } 1-p \end{cases} \quad \text{v.a.i.i.d.}$$

$$\{Y_n\} \ : \ Y_0 := y_0, \ Y_n = \sum_{i=0}^{n} G_i = Y_{n-1} + G_n$$

- **Modello binomiale moltiplicativo:**

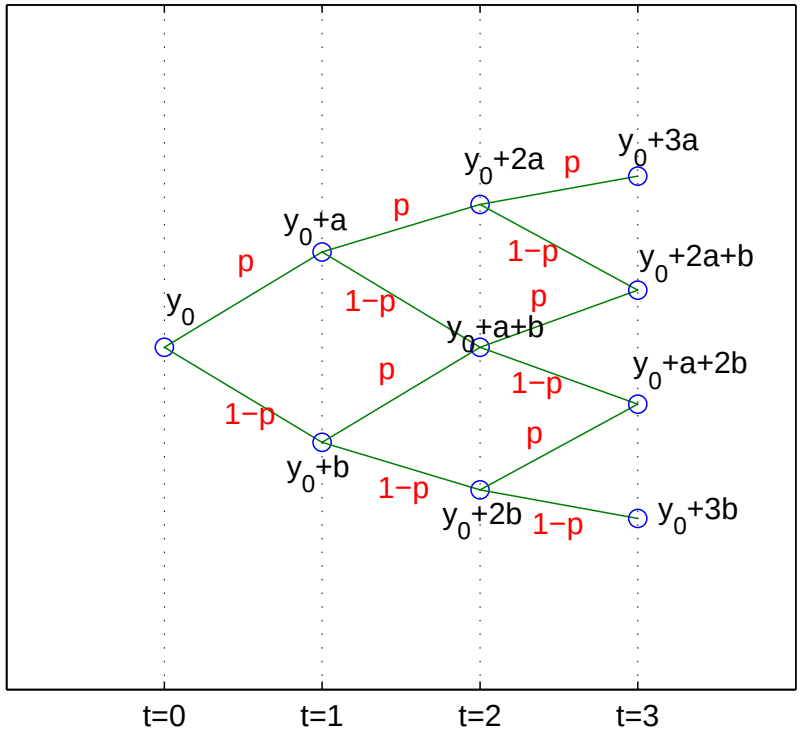
$$H_n = \begin{cases} u, & \text{con prob. } p \\ d, & \text{con prob. } 1-p \end{cases} \quad \text{v.a.i.i.d.}$$

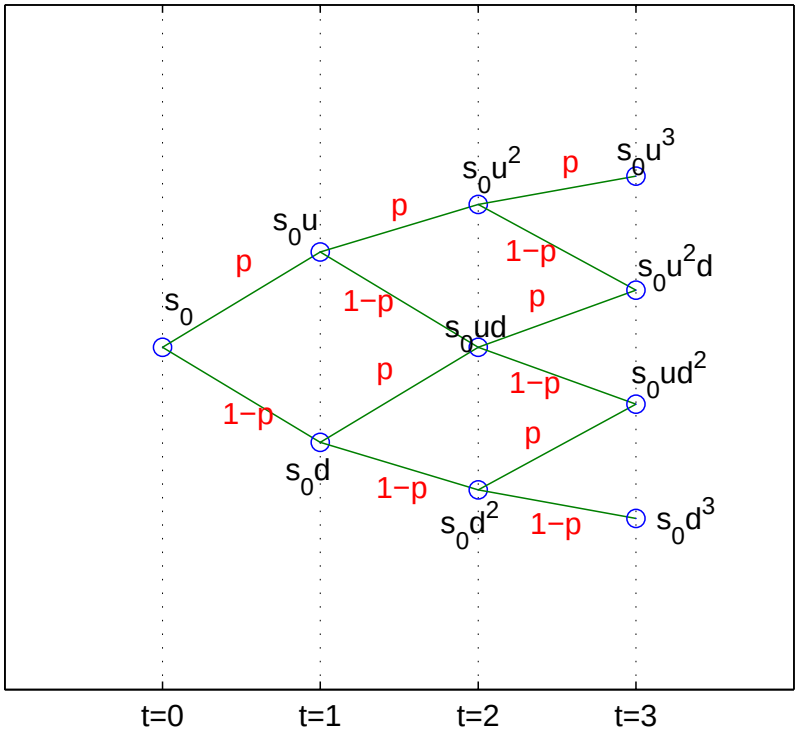
$$\{S_n\} \ : \ S_0 := s_0, \ S_n = \prod_{i=0}^{n} H_i = S_{n-1} H_n$$

Legame modello additivo – modello moltiplicativo

$\{S_n\}$ processo moltiplicativo $\Rightarrow \left\{ Y_n := \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) \right\}$ processo additivo
$\{Y_n\}$ processo additivo $\Rightarrow \{S_n := \exp(Y_n)\}$ processo moltiplicativo

Schema modelli binomiali





Albero ricombinante con probabilità $Prob = N \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Modello binomiale in Finanza

Modello di mercato a tempo discreto:

- n istanti di valutazione, $t = 0$ tempo iniziale e $t = T$ tempo finale
- titolo non rischioso B (rendimento r costante)
- titolo rischioso S (moltiplicativo)
- derivato D (moltiplicativo) con $d < e^r < u$

Problema: determinare il prezzo D del derivato al tempo iniziale, in modo che risulti compatibile con il mercato

soluzione: costruire un portafoglio che replichi, a scadenza, esattamente il payoff del derivato.

Modello binomiale in Finanza

Modello di mercato a tempo discreto:

- n istanti di valutazione, $t = 0$ tempo iniziale e $t = T$ tempo finale
- titolo non rischioso B (rendimento r costante)
- titolo rischioso S (moltiplicativo)
- derivato D (moltiplicativo) con $d < e^r < u$

Problema: determinare il prezzo D del derivato al tempo iniziale, in modo che risulti compatibile con il mercato

soluzione: costruire un portafoglio che replichi, a scadenza, esattamente il payoff del derivato.

Modello binomiale in Finanza

Modello di mercato a tempo discreto:

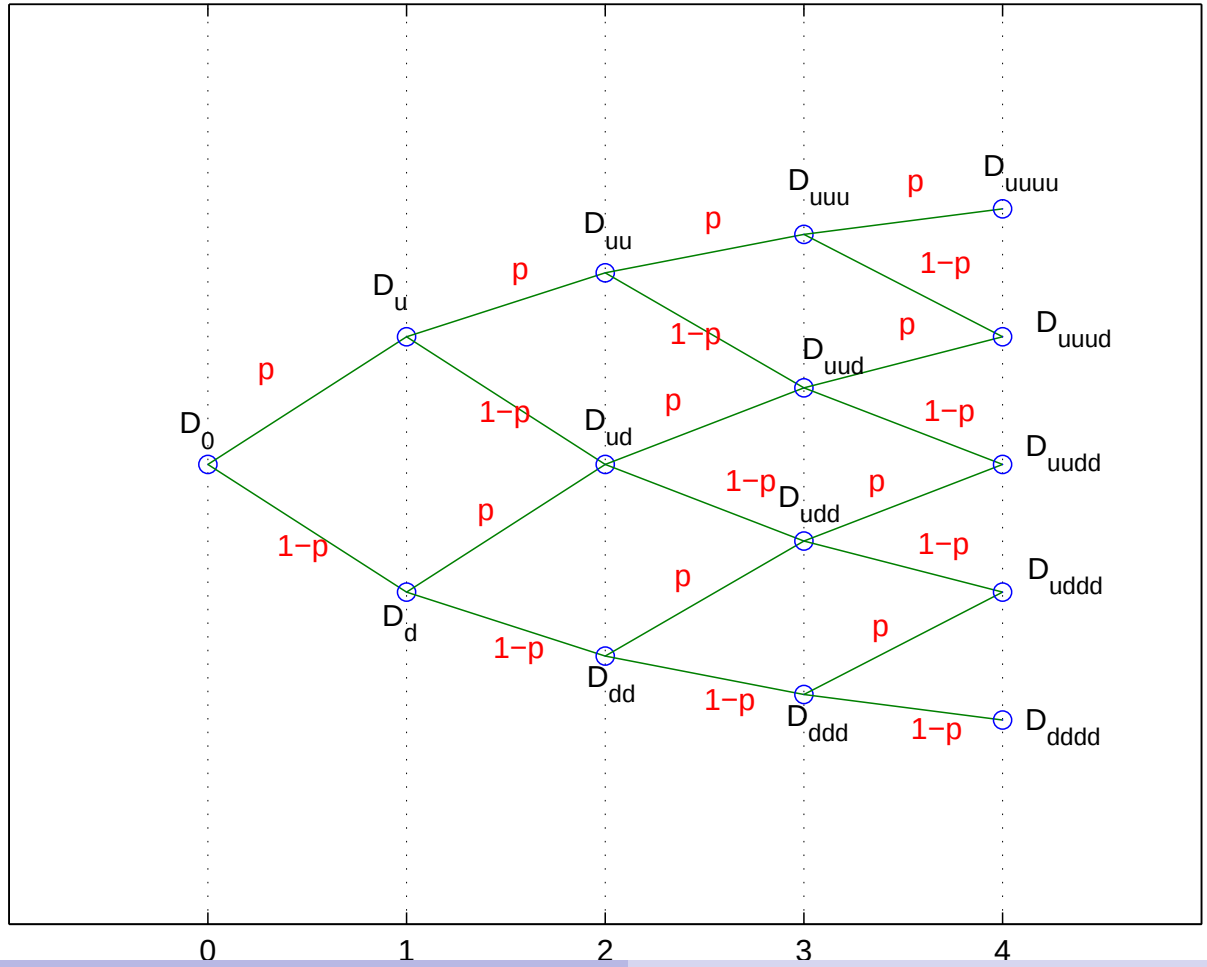
- n istanti di valutazione, $t = 0$ tempo iniziale e $t = T$ tempo finale
- titolo non rischioso B (rendimento r costante)
- titolo rischioso S (moltiplicativo)
- derivato D (moltiplicativo) con $d < e^r < u$

Problema: determinare il prezzo D del derivato al tempo iniziale, in modo che risulti compatibile con il mercato

soluzione: costruire un portafoglio che replichi, a scadenza, esattamente il payoff del derivato.

Schema modello binomiale per un derivato D_t

Formula binomiale



Due istanti di valutazione ($t = 0$ e $t = 1$)

$$D = \Delta S + B = e^{-r}\left[D_u q + D_d(1-q)\right] \ ,$$

Go Back

$$\text{con } \ \Delta = \frac{D_u - D_d}{S(u-d)},\ B = \frac{uD_d - dD_u}{e^r(u-d)},\ q = \frac{e^r - d}{u-d}$$

Tre istanti di valutazione ($t = 0,\ t = 1,\ t = 2$)

Calcolare D_u, D_d come se fossimo in $t = 1$ ed avessimo due alberi uni-periodali + calcolare D come se fossimo in un albero uni-periodale con $Payoff = [D_u,\ D_d]'$

N istanti di valutazione ($t = 0,\ t = 1,\ \ldots,\ t = N$)

Calcolare $D_{\underbrace{uu\ldots u}_{N}}, \ldots, D_{\underbrace{dd\ldots d}_{N}}$ come se fossimo in $t = N-1$ ed avessimo N alberi uni-periodali + calcolare $D_{\underbrace{uu\ldots u}_{N-1}}, \ldots, D_{\underbrace{dd\ldots d}_{N-1}}$ come se fossimo in $t = N-2$ ed avessimo $N-1$ alberi uni-periodali + etc. etc. (**Backward induction**)

Due istanti di valutazione ($t = 0$ e $t = 1$)

$$D = \Delta S + B = e^{-r}\left[D_u q + D_d(1-q)\right] \ ,$$

Go Back

$$\text{con } \ \Delta = \frac{D_u - D_d}{S(u-d)},\ B = \frac{uD_d - dD_u}{e^r(u-d)},\ q = \frac{e^r - d}{u-d}$$

Tre istanti di valutazione ($t = 0,\ t = 1,\ t = 2$)

Calcolare D_u, D_d come se fossimo in $t = 1$ ed avessimo due alberi uni-periodali + calcolare D come se fossimo in un albero uni-periodale con $Payoff = [D_u,\ D_d]'$

N istanti di valutazione ($t = 0,\ t = 1,\ \ldots,\ t = N$)

Calcolare $D_{\underbrace{uu\ldots u}_{N}}, \ldots, D_{\underbrace{dd\ldots d}_{N}}$ come se fossimo in $t = N-1$ ed avessimo N alberi uni-periodali + calcolare $D_{\underbrace{uu\ldots u}_{N-1}}, \ldots, D_{\underbrace{dd\ldots d}_{N-1}}$ come se fossimo in $t = N-2$ ed avessimo $N-1$ alberi uni-periodali + etc. etc. (**Backward induction**)

Due istanti di valutazione ($t = 0$ e $t = 1$)

$$D = \Delta S + B = e^{-r}\left[D_u q + D_d(1-q)\right] \ ,$$

Go Back

$$\text{con } \ \Delta = \frac{D_u - D_d}{S(u-d)},\ B = \frac{uD_d - dD_u}{e^r(u-d)},\ q = \frac{e^r - d}{u-d}$$

Tre istanti di valutazione ($t = 0,\ t = 1,\ t = 2$)

Calcolare D_u, D_d come se fossimo in $t = 1$ ed avessimo due alberi uni-periodali + calcolare D come se fossimo in un albero uni-periodale con $Payoff = [D_u,\ D_d]'$

N istanti di valutazione ($t = 0,\ t = 1,\ \ldots,\ t = N$)

Calcolare $D_{\underbrace{uu\ldots u}_{N}}, \ldots, D_{\underbrace{dd\ldots d}_{N}}$ come se fossimo in $t = N-1$ ed avessimo N alberi uni-periodali + calcolare $D_{\underbrace{uu\ldots u}_{N-1}}, \ldots, D_{\underbrace{dd\ldots d}_{N-1}}$ come se fossimo in $t = N-2$ ed avessimo $N-1$ alberi uni-periodali + etc. etc. (**Backward induction**)

Esercizio 1

Sia $(S_k)_k$ un processo binomiale moltiplicativo con parametri $p = 0.55$, $u = 1.1$, $d = 1/u$, $S_0 = 100$, e sia $t = 3$. Si consideri un mercato in cui vi sono presenti i seguenti titoli:

- un'azione, il cui andamento del prezzo è descritto dal processo S dato;
- un titolo non rischioso, caratterizzato dal fattore di sconto $e^{-r} = 0.9802$
- un' opzione call europea scritta sull'azione, con prezzo d'esercizio $K = 100$ e scadenza $t = 3$;
- un' opzione put americana scritta sull'azione, con prezzo d'esercizio $K = 100$ e scadenza $t = 3$.

In tale mercato:

1. calcolare il valore della call in ogni nodo dell'albero, con il procedimento a ritroso ;
2. calcolare il valore della put americana per ogni nodo dell'albero, con il procedimento a ritroso.

Costruire un apposito file di funzione ed inserire un apposito 'help'.

Un esempio di dinamica del sottostante

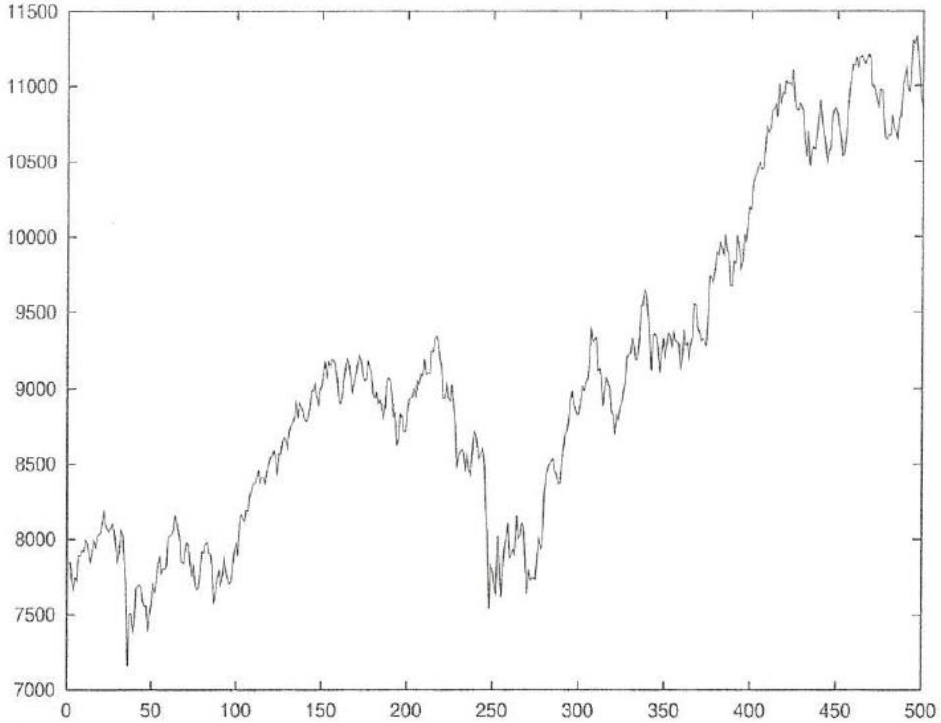


Figure: Dow Jones Index at 500 days (08/09/1997 – 31/08/1999). Source: *Numerical Methods for Option Pricing in Finance*, R.H.W. Hoppe, 2013

Mercato completo (1 asset + 1 titolo non rischioso)

$$\begin{cases} \mathrm{d}B_t = B_t r \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}S_t = S_t \mu \mathrm{d}t + S_t \sigma \mathrm{d}W_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_t = B_0 e^{rT} \\ S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\} \end{cases}$$

Problema: Determinare il prezzo al tempo $\tau < T$ di un titolo derivato che paga $H(S_T)$ a scadenza

Soluzione: formula di Black e Scholes

$$rD_\tau = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_\tau^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} + rS_\tau \frac{\partial D}{\partial S}, \; D_T := D(S,T) = H(S_T) \, .$$

Mercato completo (1 asset + 1 titolo non rischioso)

$$\begin{cases} \mathrm{d}B_t = B_t r \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}S_t = S_t \mu \mathrm{d}t + S_t \sigma \mathrm{d}W_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_t = B_0 e^{rT} \\ S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\} \end{cases}$$

Problema: Determinare il prezzo al tempo $\tau < T$ di un titolo derivato che paga $H(S_T)$ a scadenza

Soluzione: formula di Black e Scholes

$$rD_\tau = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_\tau^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} + rS_\tau \frac{\partial D}{\partial S}, \; D_T := D(S,T) = H(S_T) \, .$$

Mercato completo (1 asset + 1 titolo non rischioso)

$$\begin{cases} \mathrm{d}B_t = B_t r \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}S_t = S_t \mu \mathrm{d}t + S_t \sigma \mathrm{d}W_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_t = B_0 e^{rT} \\ S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\} \end{cases}$$

Problema: Determinare il prezzo al tempo $\tau < T$ di un titolo derivato che paga $H(S_T)$ a scadenza

Soluzione: formula di Black e Scholes

$$rD_\tau = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_\tau^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} + rS_\tau \frac{\partial D}{\partial S}, \; D_T := D(S,T) = H(S_T) \, .$$

Soluzioni esplicite della formula di Black e Scholes

Se $H(S_T) = (S_T - K)^+$ (call option), allora

$$D(S, \tau) = S_\tau \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(d_2) \ ,$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}} \text{ e } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - \tau}$$

Se $H(S_T) = (K - S_T)^+$ (put option), allora

$$D(S, \tau) = Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(-d_2) - S\tau\Phi(-d_1) \ .$$

Modello binomiale: approssimazione del prezzo di opzioni (eur/am) nel modello di Black e Scholes

Problema: come scegliere i parametri del modello?

- CRR (1979)

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},\ q = \frac{1}{2} + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}$$

- Jarrow & Rudd (1983)

$$q = \frac{1}{2},\ u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- Trigeorgis (2011)

$$u = \exp\left\{\sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (\Delta t)^2 + \sigma^2 \Delta t}\right\}, d = \frac{1}{u},\ q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\ln(u)}$$

Esercizio

Sia S il prezzo di un'azione, descritto da un moto Browniano geometrico, con $\sigma = 0.2$, $S_0 = 100$. Si consideri un'opzione call sull'azione, con scadenza 1 anno e strike price pari a $K = 100$. Sia $r = 0.06$ annuo.

1. calcolare il prezzo di non arbitraggio della call in $t = 0$, utilizzando la formula di Black e Scholes;
2. calcolare il valore della call mediante l'approssimazione binomiale per $n = 10, 100, 1000$ periodi e confrontare i valori ottenuti;
3. calcolare il valore della put americana, avente gli stessi parametri della call, mediante l'approssimazione binomiale con $n = 1000$ periodi.

Costruire un apposito file di funzione ed inserire un apposito 'help'.

Attenzione!

$$D(S,\tau) = S_\tau \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-\tau}$$

σ nota solo nel passato $\Rightarrow$ dobbiamo predire σ. Come?

volatilità storica vs. **volatilità implicita**

Attenzione!

$$D(S,\tau) = S_\tau \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-\tau}$$

σ nota solo nel passato $\Rightarrow$ dobbiamo predire σ. Come?

volatilità storica vs. **volatilità implicita**

Attenzione!

$$D(S,\tau) = S_\tau \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_\tau}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-\tau}$$

σ nota solo nel passato $\Rightarrow$ dobbiamo predire σ. Come?

volatilità storica vs. **volatilità implicita**

Volatilità implicita

Volatilità storica: deviazione standard annualizzata delle variazioni logaritmiche del prezzo del sottostante

Volatilità implicita: (unica) soluzione dell'equazione $C^*(\sigma) = C_0$, con

- $C^*(\sigma)$: prezzo BS opzione call
- C_0 : prezzo di mercato opzione call

No soluzione in forma chiusa $\Rightarrow$ metodo di **Newton-Raphson**

Volatilità implicita

Volatilità storica: deviazione standard annualizzata delle variazioni logaritmiche del prezzo del sottostante

Volatilità implicita: (unica) soluzione dell'equazione $C^*(\sigma) = C_0$, con

- $C^*(\sigma)$: prezzo BS opzione call
- C_0 : prezzo di mercato opzione call

No soluzione in forma chiusa $\Rightarrow$ metodo di **Newton-Raphson**

Volatilità implicita

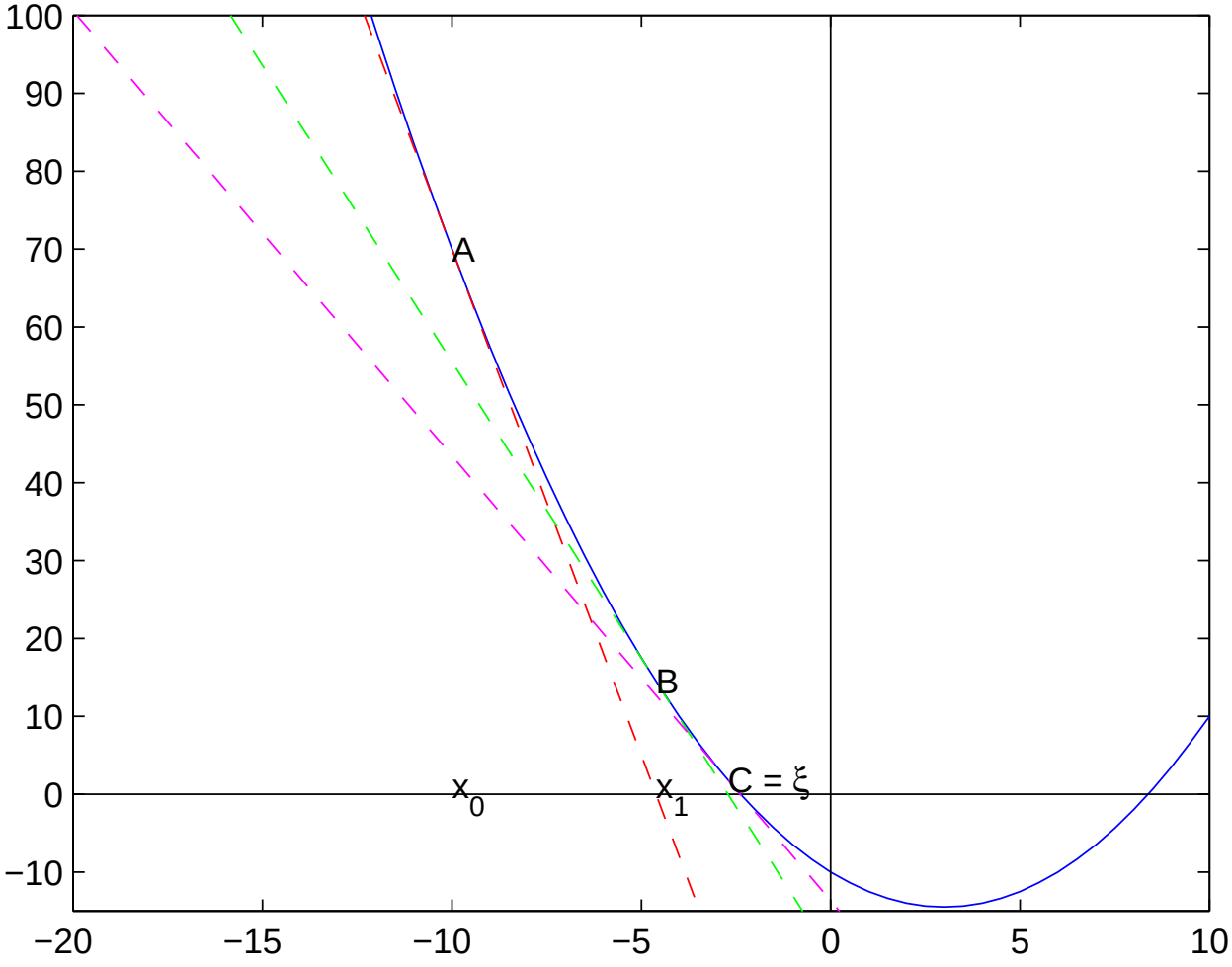
Volatilità storica: deviazione standard annualizzata delle variazioni logaritmiche del prezzo del sottostante

Volatilità implicita: (unica) soluzione dell'equazione $C^*(\sigma) = C_0$, con

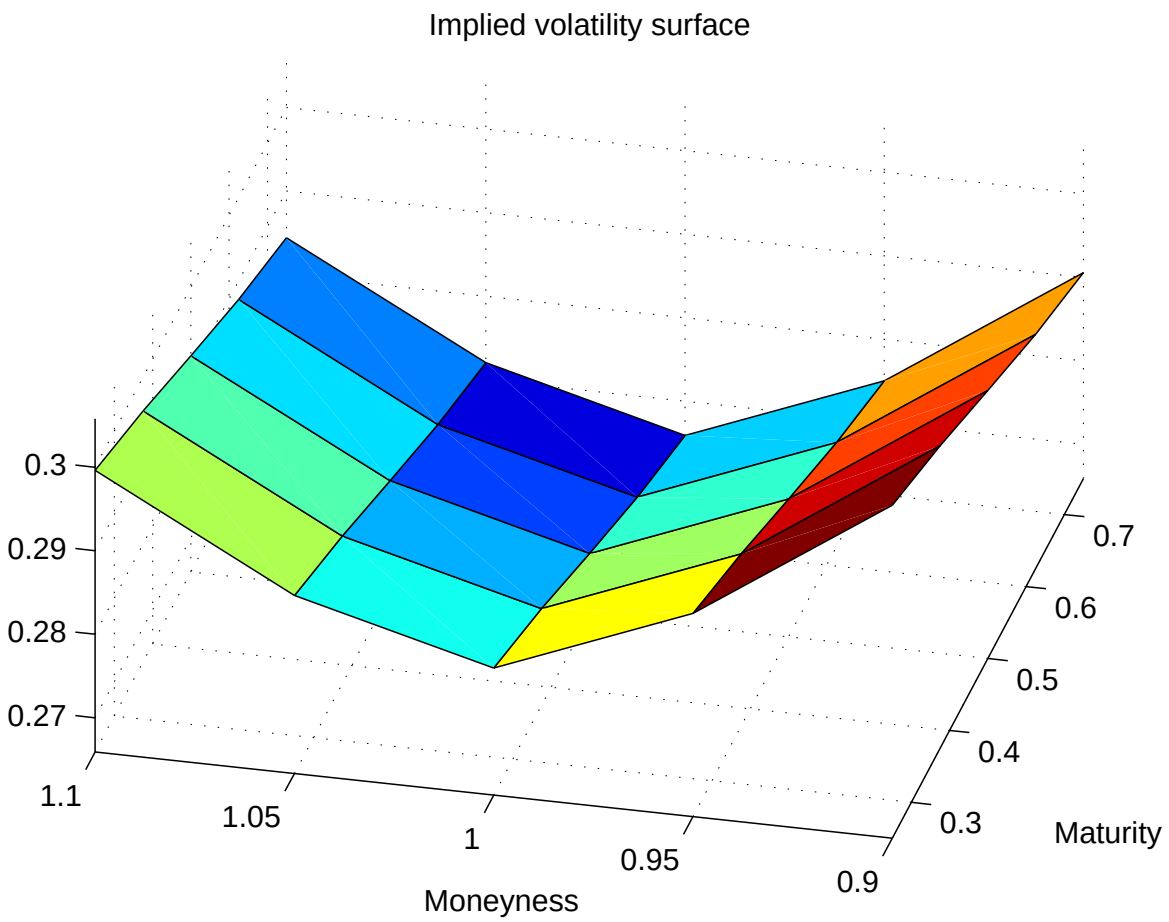
- $C^*(\sigma)$: prezzo BS opzione call
- C_0 : prezzo di mercato opzione call

No soluzione in forma chiusa $\Rightarrow$ metodo di **Newton-Raphson**

Il metodo di Newton-Raphson



Superficie di volatilità implicita



Esercizio

Sia S il prezzo di un'azione, descritto da un moto Browniano geometrico e sia C una opzione call sul sottostante S. Calcolare il valore della volatilità del titolo S, noti lo spot price $S_0 = 21$, il prezzo di esercizio $K = 20$, il tempo di esercizio $T = 0.25$, il tasso d'interesse risk-free $r = 0.01$ ed il prezzo di mercato al quale viene venduto il claim $C = 1.875$.
Costruire un apposito file di funzione ed inserire un apposito 'help'.

Nel caso di dati reali...

- Per scaricare i dati:

  http://www.cboe.com/delayedquote/QuoteTableDownload.aspx

- Per maggiori dettagli:

  R.Cont, J. Fonseca (2002) *Dynamics of implied volatility surface,* Quantitative Finance 2, pp. 45 – 60.