OPZIONI AMERICANE

↳ Caratterizzate dalla possibilità di esercitare opzione (diritto di vendere/comprare) ad ogni istante $t \in [0,T]$.

⇒ occorre precisare quale sarà il premio (payoff) in caso di esercizio anticipato.

OSS:

European option ⇒ esercizio in T ⇒ Tempo definito!

American option ⇒ quando conviene esercitare?

⇒ l'istante in cui si esercita non è deterministico, ma stocastico

⇒ DEF.

Dato una filtrazione $\mathcal{F}_t$, un Tempo d'arresto τ (o STOPPING TIME) relativamente a $\mathcal{F}_t$ è una v.a. t.c.

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t .$$

⇒ partiamo con una def. formale per le opzioni americane.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ uno sp. di prob. filtrato e supp. $\exists\, \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Consideriamo la seguente dinamica per un titolo rischioso:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)dt + \sigma dW_t , \quad \text{dove } q = \text{dividend yield}.$$

$\Rightarrow$ possiamo considerare il prezzo scontato

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$$

$$\Rightarrow d\tilde{S}_t = d\left(e^{-rt} S_t\right) = -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t$$

$$= -r \tilde{S}_t dt + e^{-rt}\left[(r-q) S_t dt + \sigma S_t dW_t\right]$$

$$= -r \tilde{S}_t dt + (r-q)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

$$= -q \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t .$$

DEF.

Un'opzione americana è un proc. stocastico $\{\psi(t,S_t)\}_{t\in[0,T]}$ dove $\psi : [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è funzione convessa e Lipschitziana.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x,y\in D,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\exists k : |\psi(x) - \psi(y)| \le k|x-y|, \ \forall x,y \in D$$

OSS: $\psi(t,S_t)$ rappresenta il premio ottenuto se si esercita l'opzione al tempo t.

DEF.

Una STRATEGIA D'ESERCIZIO è uno stopping time τ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ che valori in $[0,T]$.

L'insieme di tutte le possibili strategie di esercizio è $\mathcal{T}_T$.

$\tau_0 \in \mathcal{T}_T$ è una STRATEGIA OTTIMA se

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau_0}\psi(\tau_0, S_{\tau_0})\right] = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\psi(\tau, S_\tau)\right]$$

OSS:

Il problema $(\overline{*})$ (OBSTACLE PROBLEM) è equivalente a

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS} f \leq 0, & \text{in } S_T \\ f \geq \psi, & \text{in } S_T \\ (f-\psi)\mathcal{L}_{BS} f = 0, & \text{in } S_T \\ f(0,x) = \psi(0,x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (\overline{**})$$

In altre parole:

la soluzione di $(\overline{**})$ è una funzione $\bar{f}$ t.c.

1) $\bar{f}$ è supa-soluzione di $\mathcal{L}_{BS}$ (i.e., $\mathcal{L}_{BS}\bar{f} \leq 0$)
2) $\bar{f}$ è maggiore o uguale all'ostacolo (dato da ψ)
3) $\bar{f}$ risolve l'equazione $\mathcal{L}_{BS}\bar{f} = 0$ quando $\bar{f} > \psi$
4) ammette una condizione iniziale

OSS: $(\overline{**})$ è un caso particolare di FREE-BOUNDARY PROBLEM

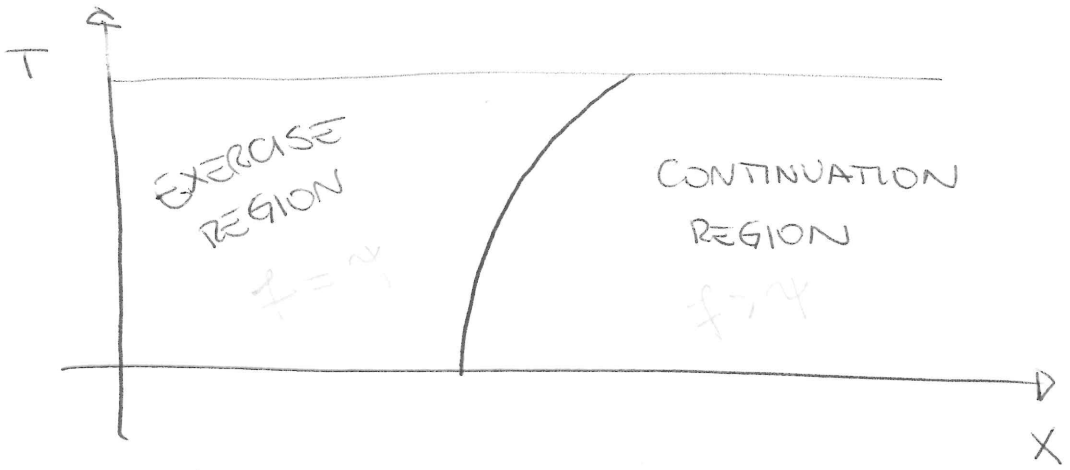
← la frontiera che separa la regione d'esercizio dalla regione di continuazione è un dato ignoto del problema.

PROBLEMA: Problemi come $(\overline{**})$ in generale non ammettono soluzioni in C^2, anche quando ψ è sufficientemente regolare (SMOOTH FUNCTION)

⇒ bisogna ricorrere a formulazioni più deboli, che portano a sol. generalizzate.

⇒ APPROCCIO VARIAZIONALE

↳ Sol = minimo di un opportuno funzionale in un opportuno spazio funzionale, i cui elementi annullano derivate (deboli) del primo ordine integrabili



$\Rightarrow$ dobbiamo studiare il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\{\mathcal{L}_{BS} f, \psi - f\} = 0, & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R} \\ f(T,\cdot) = \psi(T,\cdot), & \text{in } \mathbb{R}^+ \end{cases}, \quad (*)$$

↳ see pag. 35, 36

dove $\mathcal{L}_{BS} f := \frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf$

(F-K) $\Rightarrow$ $f(t,S) = \sup_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_T \\ \tau\in[t,T]}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} \psi(\tau, S_\tau^{t,x}) \right]$,

dove $S^{t,x}$ è sol. del MBG che descrive la dinamica di S.

<u>DEF.</u>

$$\mathcal{A}_\psi^+ := \left\{ \theta \in \Theta \;\middle|\; V_t^{(\theta)} \geq \psi(t,S_t),\ t\in[0,T] \text{ a.s.} \right\}$$

(valore del p.tf)

$$\mathcal{A}_\psi^- := \left\{ \theta \;\middle|\; \exists \tau\in\mathcal{T}_T : \psi(\tau,S_\tau) \geq V_\tau^\theta \text{ a.s.} \right\}$$

↳ strategia autofinanziante

THM.

Se f è sol. (forte) di (*), allora

$$V_0^{(0)} := f(0, S_0) \in \mathcal{A}_\gamma^+ \cap \mathcal{A}_\gamma^-.$$

Inoltre, $f(0, S_0)$ è il prezzo d'esercizio di $\gamma(t, S_t)$.

Infine, una strategia d'esercizio è

$\tau_0 = \inf_{t \in [0,T]} \{ f(t, S_t) = \gamma(t, S_t) \}$, e

$$V_0^{(0)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau_0} \gamma(\tau_0, S_{\tau_0}) \right] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau} \gamma(\tau, S_\tau) \right],$$

dove $S_t = S_0 \exp\left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - q \right) t + \sigma W_t \right\}$.

PROOF

Sia $R > 0$ fissato

$$\Rightarrow \tau_R := T \wedge \inf_{t \in [0,T]} \left\{ S_t \in \left(0, \tfrac{1}{R}\right) \cup (R, +\infty) \right\}.$$

$\forall \tau \in \mathcal{T}_T$, consideriamo $f(\tau \wedge \tau_R, S_{\tau \wedge \tau_R})$

$$\overset{\text{(ITO)}}{\Rightarrow} df(\tau \wedge \tau_R, S_{\tau \wedge \tau_R}) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \langle dS, dS \rangle$$

~~$\Rightarrow f(\tau \wedge \tau_R, S_{\tau \wedge \tau_R}) = f(0, S_0) +$~~

$$= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} \left[(r - q) S dt + \sigma S dW_t \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q) S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW_t$$

Considerando il prezzo scontato, si ha:

$$d\left(e^{-r(\tau\wedge\tau_R)}\Phi(\tau\wedge\tau_R, S_{\tau\wedge\tau_R})\right) = -r\,e^{-r(\tau\wedge\tau_R)} f\left(\tau\wedge\tau_R, S_{\tau\wedge\tau_R}\right)dt + e^{-r(\tau\wedge\tau_R)}\, df\left(\tau\wedge\tau_R, S_{\tau\wedge\tau_R}\right)$$

$$= -r\,e^{-r(\tau\wedge\tau_R)} f\left(\tau\wedge\tau_R, S_{\tau\wedge\tau_R}\right)dt + e^{-r(\tau\wedge\tau_R)}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{df}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]dt + e^{-r(\tau\wedge\tau_R)}\sigma S\frac{\partial f}{\partial S}\, dW_{\tau\wedge\tau_R}$$

$$= e^{-r(\tau\wedge\tau_R)}\left[-rf + \frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt + e^{-r(\tau\wedge\tau_R)}\sigma S\frac{\partial f}{\partial S}\, dW_{\tau\wedge\tau_R}$$

(INTEGRAL FORM) $\Rightarrow$

$$e^{-r(\tau\wedge\tau_R)} f\left(\tau\wedge\tau_R, S_{\tau\wedge\tau_R}\right) = \underbrace{f(0,S_0)}_{V_0\ (\text{by def.})} + \int_0^{\tau\wedge\tau_R} e^{-rt}\mathcal{L}_{BS} f(t,S_t)\,dt + \int_0^{\tau\wedge\tau_R}\sigma\tilde{S}_t\frac{\partial f}{\partial S}\,dW_t$$

(Equivalente) $\Rightarrow$

$$e^{-r(\tau\wedge\tau_R)} f\left(\tau\wedge\tau_R, S_{\tau\wedge\tau_R}\right) \overset{(\text{PROP. 3})}{=} \tilde{V}_{\tau\wedge\tau_R} + \int_0^{\tau\wedge\tau_R} e^{-rt}\mathcal{L}_{BS} f(t,S_t)\,dt$$

essendo $\tilde{V}_t := e^{-rt}V_t$ (valore scontato della strategia di investimento θ).

$\Rightarrow$ Cosa succede quando R cresce?

↳ Convergenza in media quadratica:

$$\lim_{R\to+\infty}\mathbb{E}\left[\left|\tilde{V}_{\tau\wedge\tau_R} - \tilde{V}_\tau\right|^2\right] = 0.$$

i.e., $\lim_{R\to+\infty} \tilde{V}_{\tilde{\tau}\wedge\tilde{\tau}_R} = ?$ (in media quadratica)

$$\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\int_{\tilde{\tau}\wedge\tilde{\tau}_R}^{\tilde{\tau}} \sigma \tilde{S}_t \frac{\partial f}{\partial S}\, dW_t\right)^2\right] \overset{\text{ISOMETRIA DI ITO}}{=} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma \tilde{S}_t \frac{\partial f}{\partial S} \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}\wedge\tilde{\tau}_R \le t \le \tilde{\tau}\}}\, dW_t\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\sigma \tilde{S}_t \frac{\partial f}{\partial S} \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}\wedge\tilde{\tau}_R \le t \le \tilde{\tau}\}}\right)^2 dt\right] \xrightarrow{(R\to+\infty)} 0$$

(ISOMETRIA DI ITO $=$)

TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\left(\tilde{V}_{\tilde{\tau}} - \tilde{V}_{\tilde{\tau}\wedge\tilde{\tau}_R}\right)^2\right] \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_{\tilde{\tau}\wedge\tilde{\tau}_R} \xrightarrow{(R\to+\infty)} \tilde{V}_{\tilde{\tau}} \text{ in media quadratica}$$

↳ Utile per dimostrare il passaggio successivo!

Osserviamo che S_t ha densità positiva e $\mathcal{L}_{BS} f < 0$ q.o.

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \tilde{V}(t\wedge\tilde{\tau}_R) \ge e^{-r(t\wedge\tilde{\tau}_R)} f(t\wedge\tilde{\tau}_R, S_{t\wedge\tilde{\tau}_R})$$

$$\Rightarrow V_{t\wedge\tilde{\tau}_R} \ge f(t\wedge\tilde{\tau}_R, S_{t\wedge\tilde{\tau}_R}) \xrightarrow{(R\to+\infty)} V_t \ge f(t,S_t) \ge \varphi(t,$$

$$\Rightarrow V \in \mathcal{A}_\varphi^+.$$

Inoltre, su $\{\tilde{\tau}_0 \ge t\}$, $\mathcal{L}_{BS} f = 0$ q.c. $\Rightarrow V_{\tilde{\tau}_0\wedge\tilde{\tau}_R} = f(\tilde{\tau}_0\wedge\tilde{\tau}_R, S_{\tilde{\tau}_0\wedge\tilde{\tau}}$ $\forall R>0$

$$\overset{(R\to+\infty)}{\Rightarrow} V_{\tilde{\tau}_0} = f(\tilde{\tau}_0, S_{\tilde{\tau}_0}) = \varphi(\tilde{\tau}_0, S_{\tilde{\tau}_0}) \in \bar{\mathcal{A}}_\varphi.$$

(per stopping time)

L'ultimo risultato segue dal Teorema di Feynman-Kac. ∎

PROP.

Sia $\tilde{V}_t := e^{-rt} V_t$, con $V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$.

La strategia $\Theta_t = (\alpha_t, \beta_t)$ di cui V_t è valore processo è autofinanziante se e soltanto se

$$d\tilde{V}_t = \alpha_t \left(d\tilde{S}_t + q\tilde{S}_t dt \right), = \alpha_t \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

o equivalentemente (in forma integrale)

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \alpha_s \sigma \tilde{S}_s dW_s.$$

PROOF!

Sia $\Theta_t = (\alpha_t, \beta_t)$ con $V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$

$\Rightarrow$ V_t è ptf autofinanziante se

$$dV_t = \alpha_t (dS_t + qS_t dt) + \beta_t dB_t.$$

Inoltre, $dS_t = (r-q) S_t dt + \sigma S_t dW_t$

$$\Rightarrow dV_t = \alpha_t \left[(r-q) S_t dt + \sigma S_t dW_t \right] +$$
$$+ \alpha_t q S_t dt + \beta_t dB_t$$

$$= \alpha_t r S_t dt - \alpha_t \cancel{q} S_t dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t +$$
$$+ \alpha_t \cancel{q} S_t dt + r \beta_t B_t dt$$

$$= r \alpha_t \cancel{S_t} dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t + r \left(V_t - \cancel{\alpha_t S_t} \right) dt$$

$$\Rightarrow d\tilde{V}_t = d\left(e^{-rt} V_t\right) =$$

$$= -r e^{-rt} V_t dt + e^{-rt} dV_t$$

$$= -r e^{-rt} V_t dt + e^{-rt}\left[\sigma \alpha_t S_t dW_t + \alpha_t r V_t dt\right]$$

$$= \alpha_t \sigma e^{-rt} S_t dW_t = \alpha_t \sigma \tilde{S}_t dW_t \quad (*)$$

$$= \alpha_t \sigma \tilde{S}_t dW_t - \alpha_t q \tilde{S}_t dt + q \alpha_t \tilde{S}_t dt$$

$$= \alpha_t\left[q \tilde{S}_t dt + d\tilde{S}_t\right]$$

(INTEGRAL FORM (*)) $\Rightarrow$ $$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \alpha_s \sigma \tilde{S}_s dW_s \quad \blacksquare$$

COROL: (Immediate application of Theorem)

$$c^{AM} = c(S_0, k, T, r, q) = \sup_{\tau \in \tilde{T}_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} - k\right)^+\right]$$

$$p^{AM} = p(S_0, k, T, r, q) = \sup_{\tau \in \tilde{T}_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(k - S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^+\right] \quad \blacksquare$$

PROP

$$c^{AM}(S_0, k, T, r, q) = p^{AM}(k, S_0, T, q, r).$$

PROOF:

Sia $Z_t := e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$, $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = Z_T \Rightarrow \tilde{W}_t = W_t - \sigma t$

↳ MB sotto $\mathbb{Q}$

↳ $\mathbb{Q}$-martingala, con $\mathbb{E}[Z_T] = 1$

$\sigma \tilde{W}_t = \sigma W_t - \sigma^2 t$

$\Rightarrow + \sigma W_t = \sigma \tilde{W}_t + \sigma^2 t$

$$e^{Am} \overset{\text{(COROLLARIO)}}{=} \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau} \left(S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} - K \right)^+ \right]$$

moltiplico/divido per Z_τ

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z_\tau}{Z_\tau} e^{-r\tau} \left(S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} - K \right)^+ \right]$$

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_\tau e^{-r\tau} \underbrace{e^{-\sigma W_\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau}}_{= Z_\tau^{-1}} \left(S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} - K \right)^+ \right]$$

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_\tau e^{-\sigma W_\tau - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} \left(S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} - K \right)^+ \right]$$

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_\tau e^{-\sigma W_\tau - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} e^{q\tau - q\tau} \left(S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} - K \right)^+ \right]$$

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_\tau e^{-q\tau} e^{-\sigma W_\tau - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} \left(S_0 e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} - K \right)^+ \right]$$

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_\tau e^{-q\tau} \left(S_0 - K e^{-\sigma W_\tau - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} \right)^+ \right]$$

$(W_\tau = \tilde{W}_\tau + \sigma\tau)$

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_\tau e^{-q\tau} \left(S_0 - K e^{-\sigma \tilde{W}_\tau + \sigma^2\tau - r\tau + q\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau} \right)^+ \right]$$

$$= \sup_\tau \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z_\tau e^{-q\tau} \left(S_0 - K e^{-\sigma \tilde{W}_\tau + (-r + q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} \right)^+ \right]$$

(CAMBIO NUMERATORE) $= \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-q\tau} \left(S_0 - k e^{\ldots} \right) \right]$

$= P^{Eur}$

$\hookrightarrow$ $-\tilde{W}$ è $\tilde{\mathbb{Q}}$-MOTO BROWNIANO (per simmetria rispetto a $\tilde{W}$)

PROPRIETÀ DELLE OPZIONI PUT AMERICANE:

1) $\forall S \in \mathbb{R}^+$, la funzione $t \longmapsto P^{Am}(S,t)$ è crescente

$\Rightarrow$ fissati i parametri dell'opzione, il valore dell'opzione put americana diminuisce man mano che ci si avvicina alla scadenza.

2) $\forall t \in [0,T]$, la funzione $S \longmapsto P^{Am}(S,t)$ è decrescente, convessa e si ha

$$\lim_{S \to 0^+} P^{Am}(S,t) = k.$$

3) $\forall (t,S) \in [0,T) \times \mathbb{R}^+$, si ha $-1 \leq \dfrac{\partial P^{Am}(S,t)}{\partial S} \leq 0$

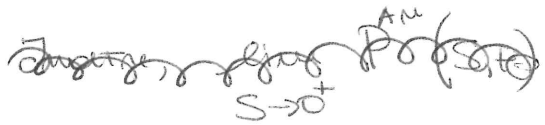
PROOF:

1) bounds

2) Per definizione, $P^{Am}(S,t) = \sup_{\tau \in \tilde{T}_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(K - Se^{\sigma W_\tau + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}\right)^+\right]$

$\Rightarrow$ decrescente e convessità discendono dalle stesse proprietà verificate dal sup:

$\{g_\tau\}$ famiglia di funzioni monotone e convesse $\Rightarrow g := \sup_{\tau} g_\tau$ è monotone e convessa.



3) $S \longmapsto P^{Am}(S,t)$ decrescente $\Rightarrow \dfrac{\partial P^{Am}}{\partial S} \leq 0$.

Per verificare la seconda disuguaglianza, ricordiamo che

$$\frac{\partial P^{Am}}{\partial S} = \lim_{|h| \to 0} \frac{\left|P^{Am}(t, S+h) - P^{Am}(t,S)\right|}{|h|}$$

$\Rightarrow$ Poniamo $S + h := \tilde{S}$ e consideriamo il rapporto incrementale $\dfrac{\left|P^{Am}(t,\tilde{S}) - P^{Am}(t,S)\right|}{|\tilde{S} - S|}$.

Dunque:

$$\left|P^{Am}(t,\tilde{S}) - P^{Am}(t,S)\right| = \left|\sup_{\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(K - \tilde{S}e^{\sigma W_\tau + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}\right)^+\right] - \right.$$
$$\left. - \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(K - Se^{\sigma W_\tau + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}\right)^+\right]\right|$$

$$\leq \sup_{\tau} \left| \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(k - S e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^+ \right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(k - S e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^+ \right] \right|$$

(Tob)

$$= \sup_{\tau} \left| \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(k - \tilde{S} e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^+ - \left(k - S e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^+ \right] \right|$$

$$\leq \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau} \left| \left(k - \tilde{S} e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^+ - \left(k - S e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}\right)^+ \right| \right]$$

$$\leq \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau} \left| -\tilde{S} e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} + S e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} \right| \right]$$

$$= \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left| e^{-r\tau} e^{\sigma W_\tau + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau} (S - \tilde{S}) \right| \right]$$

$$\overset{(q \geq 0)}{\leq} |S - \tilde{S}| \cdot \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\underbrace{e^{\sigma W_\tau - (+q + \frac{\sigma^2}{2})\tau}}_{\text{MG ESPONENZIALE (ha medio 1)}} \right]$$

$$= |S - \tilde{S}|$$

$$\Rightarrow |P^{Am}(t, \tilde{S}) - P^{Am}(t, S)| \leq |S - \tilde{S}|$$

$$\Rightarrow |P^{Am}(t, \tilde{S}) - P^{Am}(t, S)| \leq |\tilde{S} - S|$$

$$\Rightarrow \frac{|P^{Am}(t, \tilde{S}) - P^{Am}(t, S)|}{|\tilde{S} - S|} \leq 1$$

$$\overset{(\tilde{S} \to S)}{\Rightarrow} \frac{\partial P^{Am}(t, S)}{\partial S} \leq -1 \quad \blacksquare$$