Radici, radicali e potenze ad esponente non intero

Radici:

Dato il numero reale b ed un numero intero *positivo* n se esiste un numero reale x tale che:

$$x^n = b \tag{1}$$

diremo che b è l'ennesima potenza di x o anche che x è una *radice ennesima* di b.

Esempi

$$\begin{aligned}
&(-3)^4 = 81 \ \text{ quindi } -3 \text{ è una radice quarta di } 81 \\
&3^4 = 81 \ \text{ quindi } 3 \text{ è anch'essa una radice quarta di } 81 \\
&(-3)^3 = -27 \ \text{ quindi } -3 \text{ è una radice} \\
&\qquad \text{terza (si dice anche } \textit{cubica}\text{) di } -27 \\
&2^2 = 4 \ \text{ quindi } 2 \text{ è una radice seconda} \\
&\qquad \text{(si dice anche } \textit{quadrata}\text{) di } 4 \\
&\left(-2^2\right) = 4 \ \text{ quindi } - \\
&\qquad 2 \text{ è un'altra radice } \textit{quadrata} \text{ di } 4
\end{aligned} \tag{2}$$

Come si intuisce dagli esempi precedenti conviene per il seguito distinguere due casi:

$\boxed{\textbf{\textit{n}} \textbf{ pari}}$

Come noto se n è pari allora per qualsiasi reale x si ha sempre:

$$x^n \geq 0$$
con il segno uguale *solo* nel caso $x = 0$ (3)

cioè la *potenza con esponente pari di un numero (positivo o negativo) è sempre positiva.*
Ciò significa che nell'ambito dei numeri reali se n è pari e
- $b < 0$ non esiste alcun numero reale x tale che $x^n = b$:

cioè **non esiste la radice ennesima, con *n* pari, di un numero negativo.**

Esempio

- $(-2)^4 = 16$
- $2^4 = 16$

non esiste alcun numero reale che
elevato al quadrato dia come risultato -16. (4)

viceversa se
- $b > 0$ esiste sempre un numero reale positivo x tale che:

$$x^n = b$$
ma in questo caso se si considera il
numero reale negativo $-x$, si ha ancora :
$$(-x)^n = b \tag{5}$$
e quindi per n pari *e* $b >$
0 sono sempre definite *due* radici reali di b ed
esse sono sempre l' una opposta dell' altra.

Esempi

- Il numero $b = 16$ ha due radici quadrate $(n = 2)$;

una positiva data da $x =$

$+4$ *e* l' altra negativa data da $-x = -4$

Infatti : $4^2 = 16$ e $(-4)^2 = 16$.

- Il numero $b = 16$ ha due radici quarte $(n = 4)$;

una positiva data da $x =$

$+2$ e l' altra negativa data da $-x = -2$

Infatti : $2^4 = 16$ e $(-2)^4 = 16$.

n dispari

Se n è dispari allora

$$x^n \text{ ha lo } \textit{stesso segno} \text{ di } x \qquad (7)$$

Quindi per *n dispari* e *b positivo* esiste sempre una radice reale *positiva* di *b*;
per *n dispari* e *b negativo* esiste sempre una radice reale *negativa* di *b*.

Esempi

- $(-2)^3 = -8$, quindi -2 è la radice cubica di -8
- $2^3 = 8$, per cui 2 è la radice cubica di 8
- se $x^3 = -27$,

allora $x = -3$; infatti $(-3)^3 = -27$ (8)

Riepilogando :

- per n pari *e* $b >$ 0 esistono due radici reali e distinte di b di uguale valore assoluto ma di segno opposto
- per n pari *e* $b < 0$ non esiste alcuna radice reale di b (9)
- per n dispari e b qualsiasi esiste una ed una sola

radice reale di b ed essa ha lo stesso segno di b

- per n qualsiasi e $b = 0$ la radice ennesima di zero è zero.

Radicali:

Per indicare una radice ennesima di un numero si usa il simbolo di radicale:

$$\sqrt[n]{b} \tag{10}$$

n si chiama *indice* del radicale e b *radicando*. Per $n = 2$ in genere l'indice non viene scritto esplicitamente,
per cui la radice quadrata di b si indica con il simbolo $\sqrt{b}$.
Poichè però il numero b può ammettere più di una radice occorre precisare bene il significato del simbolo di radicale.

Convenzione sui radicali:

- se n è dispari $\sqrt[n]{b}$ denota l' unica radice ennesima reale di b, la quale è positiva se $b > 0$ mentre invece è negativa se $b < 0$
- se n è pari $e\ b > 0$ allora $\sqrt[n]{b}$ denota la radice ennesima **positiva** di b, (11)
mentre invece la radice reale *negativa* si denota con il simbolo $-\sqrt[n]{b}$
- se n è pari $e\ b < 0$ allora $\sqrt[n]{b}$ è privo di significato in campo reale.

Nota bene:

Hai capito bene la convenzione sui radicali? Vediamo.

Dato un numero reale qualsiasi *x* e *n* pari a cosa è uguale

$$\sqrt[n]{x^n} \qquad ?? \tag{12}$$

Non sempre ad *x* ovviamente, come qualche sprovveduto (per fortuna sono rarissimi) potrebbe pensare.
Ragiona: se ad esempio $x = 5$ e $n = 2$ allora

$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = +5$

e quindi in questo caso effettivamente $\sqrt[n]{x^n} = x$, ma se $x = -5$ si ha

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = +5 = -(-5) = -x$ in quanto il simbolo $\sqrt{\ }$ rappresenta sempre la radice positiva! Per quella negativa occorre mettere esplicitamente il meno $-\sqrt{\ }$.

In generale quindi:

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| \tag{13}$$

Avvertenza:

spesso, in particolare per le radici quadrate,
si usa la notazione $\pm\sqrt{b}$ per indicare
entrambe le radici quadrate di b : quindi
$\pm\sqrt{b}$ indica, con un solo simbolo,
le due radici $\sqrt{b}$ e $-\sqrt{b}$

Quindi è **sbagliato** scrivere ad esempio

$$\sqrt{9} = \pm 3 \tag{14}$$

in quanto $\sqrt{9}$ rappresenta la radice positiva di 9 e quindi +3. E' corretto invece dire che le radici quadrate di 9 sono due e sono date da

$$\sqrt{9} = +3 \qquad e \qquad -\sqrt{9} = -3 \tag{15}$$

che si possono indicare simultaneamente con il simbolo

$$\pm\sqrt{9} = \pm 3 \tag{16}$$

Esempi

- $\sqrt[3]{-27} =$
  -3 infatti $(-3)^3 = 27$
- $\sqrt[3]{8} = 2$ " $2^3 = 8$
- $\sqrt[4]{16} = 2$ " $2^4 = 16$
- $-\sqrt[4]{16} = -2$ " $(-2)^4 = 16$
- $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ " $(2)^4 =$
  $16 = (-2)^4$
- $-\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$
  " $(-2)^4 = (-2)^4$ (17)

  come si vede da questi due ultimi esempi le radici quarte di $(-2)^4$ sono due: la positiva $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ e la negativa $-\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$

- $\sqrt[4]{-2^4}$ non ha significato
- $\sqrt[3]{-2^4}$ ha significato!

E' uguale a $\sqrt[3]{-2^3 \cdot 2} = -2\sqrt[3]{2}$

Radici e frazioni:

Abbiamo visto che dato un qualsiasi numero razionale (rapporto di numeri interi) $\frac{p}{q}$ la sua $n-$sima potenza (n intero) è ancora un numero razionale in quanto

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$$

E' vero il viceversa?

Cioè la radice $n-$esima di un numero razionale è sempre un razionale e quindi esprimibile come rapporto di interi?

La risposta è negativa:

basta pensare che

(come dimostrò la scuola di Pitagora) già

la radice quadrata di un numero intero

come ad esempio $\sqrt{2}$ non è razionale,

non esiste cioè alcuna coppia p e q di numeri interi tali che si abbia $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Potenze ad esponente frazionario:

A partice dal concetto di radice ennesima si può definire in modo coerente la potenza di un numero reale a con esponente frazionario (razionale). Si pone semplicemente:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{18}$$

Ricordando le proprietà dei radicali possiamo quindi dire che $a^{\frac{1}{n}}$ per n dispari è definito per a qualsiasi ed ha lo stesso segno di a; invece per n pari $a^{\frac{1}{n}}$ è definita solo per $a \geq 0$ e si ha anche $a^{\frac{1}{n}} \geq 0$ (0 se e solo se $a = 0$). Dato allora il numero intero qualsiasi m è definita la potenza m-esima di $a^{\frac{1}{n}}$ e si pone:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \tag{19}$$

Attenzione:

$a^{\frac{m}{n}}$ ha dunque significato per tutti gli a per i quali ha significato $a^{\frac{1}{n}}$; per $m = 0$ ha significato solo per $a \neq 0$.
Nota inoltre che la definizione data è coerente con quanto visto in precedenza per i radicali nel senso che si ha ad esempio

$$a^{\frac{n}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = a^1 \tag{20}$$

Esempi

- $25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 125$
- $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 9$
- $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

- $25^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$
- $27^{-\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^{2}} = \dfrac{1}{9}$
- $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$

- $(-64)^{\frac{1}{2}} =$

  $\sqrt{-64}$ non ha significato (non definita)
- $-64^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{64} = -8$
- $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$
- $-64^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{64} = -4$
- $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$
- $\left[(-2)^4\right]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^4} = +2$
- $-\left[(-2)^4\right]^{\frac{1}{4}} = -\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$
- $\left[(-2)^{\frac{1}{4}}\right]^4 =$

  $\left(\sqrt[4]{-2}\right)^4$ ma $\sqrt[4]{-2}$ non è definita

  quindi $\left[(-2)^4\right]^{\frac{1}{4}} \neq \left[(-2)^{\frac{1}{4}}\right]^4$ nel senso che

  il primo membro è definito e uguale a 2,

mentre il secondo membro non è definito.

Quindi, secondo le nostre definizioni :

$(-2)^{\frac{4}{4}} = \left[(-2)^{\frac{1}{4}}\right]^4 = \left(\sqrt[4]{-2}\right)^4$

sembrerebbe non definita,
ma se si riduce la frazione all' esponente ai minimi

termini $\frac{4}{4} = 1$ e quindi $(-2)^{\frac{4}{4}} = (-2)^1 = -2$

Attenzione:

Invece di definire $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, come abbiamo fatto, avremmo potuto porre $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Con tale definizione $(-2)^{\frac{4}{4}} = \left[(-2)^4\right]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$, ma allora si avrebbe la non piacevole uguaglianza:

$$-2 = (-2)^1 = (-2)^{\frac{4}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^4} = +2 \quad (22)$$

(a meno di non cambiare la convenzione sui radicali, che però porterebbe ad altri inconvenienti).

E' evidente che tutti i problemi nascono esclusivamente per i valori di *a negativi*, e per tali valori è bene essere molto cauti quando si utilizzano gli esponenti frazionari. Per ***a* ≥0** si ha invece

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad a \geq 0 \qquad (23)$$

e quindi

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad a \geq 0 \qquad (24)$$

Consolazione: Il fatto che l'uguaglianza precedente sia valida per $a \geq 0$ ma non per $a < 0$, comporta l'onere di dover verificare il segno di a prima di applicare la regola. Ma c' una "consolazione" nel senso che tra poco definiremo anche potenze con esponente irrazionale chiudendo il "cerchio" nel senso che a quel punto sarà definita la potenza a^b con b numero reale qualsiasi (quindi intero o decimale finito, periodico o illimitato non periodico). Perchè però tutti i conti tornino senza dovere ogni volta stabilire la natura (intero, razionale, irrazionale) della base a, dovremo limitare le nostre considerazioni esclusivamente ai valori di $a > 0$, per i quali tutto è più semplice.

Si potrebbe infine vedere che tutte le regole viste in precedenza per gli esponenti interi continuano a valere per gli esponenti razionali (guarda esempi che seguono).

Esempi (non è vietato tentare di svolgere ciascuno di questi esempi autonomamente!)

- $\sqrt{a}\,\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a \qquad a \geq 0$
- $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7} = \sqrt[6]{a^6\,a^1} = a\,\sqrt[6]{a} \qquad a \geq 0 \left(\text{per questo motivo } \sqrt[6]{a^6} = a \text{ e non } c\text{' è bisogno del modulo}\right)$
- $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{7}{6}} = \left(\text{essendo } \frac{7}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6}\right) = a^{1+\frac{1}{6}} = a^1\,a^{\frac{1}{6}} = a\,\sqrt[6]{a}$

- $\left(27^2\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{2\times\frac{1}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$
- $x^{\frac{2}{5}}\, x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{5}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{19}{10}} = \left(\sqrt[10]{x}\right)^{19}$
- $x^{1.9} = x^{\frac{19}{10}} = \left(\sqrt[10]{x}\right)^{19}$
- $25^{0.5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$
- $27^{0.\overline{6}} =$

  $27^{0.66666\ldots} = 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$
- $15^{0.765} = 15^{\frac{765}{1000}} = \left(\sqrt[1000]{15}\right)^{765}$
- $\dfrac{27^2}{27^{\frac{2}{3}}} =$

  $27^2 \cdot 27^{-\frac{2}{3}} = 27^{2-\frac{2}{3}} = 27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$
- $\dfrac{27}{27^{\frac{1}{3}}} = 27 \cdot 27^{-\frac{1}{3}} = 27^{1-\frac{1}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 9$
- $\dfrac{27}{27^{-\frac{1}{3}}} =$

  $27 \cdot 27^{\frac{1}{3}} = 27^{1+\frac{1}{3}} = 27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 81$
- $\dfrac{27^{-\frac{2}{3}}}{27^{-2}} = 27^{-\frac{2}{3}}\, 27^2 = 27^{-\frac{2}{3}+2} = 27^{\frac{4}{3}} = 81$
- $\dfrac{27^{-\frac{2}{3}}}{27^{-2}} = \dfrac{27^2}{27^{\frac{2}{3}}} = 27^{2-\frac{2}{3}} = 27^{\frac{4}{3}} = 81$

- $$\frac{27^{-1}}{27^{\frac{1}{3}}} = 27^{-1}\,27^{-\frac{1}{3}} =$$

  $$27^{-1+-\frac{1}{3}} = 27^{-\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-4} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

- $$\frac{27^{-1}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{27^1\,27^{\frac{1}{3}}} =$$

  $$\frac{1}{27^{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{27^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

- $$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x^3} = x^{\frac{11}{6}}$$

- $$\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

- $$\sqrt{27} = \sqrt{3\cdot 9} = \sqrt{3\cdot 3^2} = 3\sqrt{3}$$

- $$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$$

- $$\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \left(27^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

  $$27^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

- $$\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \left(27^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

  $$27^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{6}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} \quad \sqrt[6]{27} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

- $$\sqrt[3]{\sqrt{27}}\;\sqrt{\sqrt[3]{27}} =$$

  $$\left(27^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 27^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\;27^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} =$$

  $$27^{\frac{1}{6}}\cdot 27^{\frac{1}{6}} = 27^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = 27^{\frac{2}{6}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$$

Potenze ad esponente irrazionale:

Cosa significa ad esempio:

$$a^{\sqrt{2}} \tag{26}$$

oppure:

$$a^{\pi} \tag{27}$$

cioè potenze in cui l'esponente è irrazionale? E' possibile definire tali potenze tramite un procedimento di approssimazioni successive al quale farò un cenno con un esempio.

Esempio:

$$\sqrt{2} \tag{28}$$

è, come visto in precedenza, irrazionale per cui è rappresentato (tramite l'algoritmo di estrazione di radice quadrata: tu non lo ricordi ma la tua calcolatrice si) da un numero decimale illimitato e non periodico:

$$\sqrt{2} = 1.414213\ldots\ldots.. \tag{29}$$

possiamo quindi dare delle approssimazioni successive per difetto (cioè sempre inferiori al numero che vogliamo approssimare) di $\sqrt{2}$ nel seguente modo:

$\sqrt{2} \simeq 1$ con un errore inferiore ad $1 = 10^0$

$\sqrt{2} \simeq 1.4$ con un errore inferiore ad $\frac{1}{10} = 10^{-1}$

$\sqrt{2} \simeq 1.41$ con un

errore inferiore ad $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

$\sqrt{2} \simeq 1.414$ con un errore

inferiore ad $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$

$\sqrt{2} \simeq 1.4142$ con un errore

inferiore ad $\frac{1}{10\,000} = 10^{-4}$

… …

… … … …

Nota bene: le successive approssimazioni per difetto di $\sqrt{2}$ sono numeri razionali (decimali finiti). Dato quindi un numero reale $a > 0$ ha significato considerare le potenze successive:

$$
\begin{aligned}
&a^1 \\
&a^{1.4} = a^{\frac{14}{10}} = \left(\sqrt[10]{a}\right)^{14} \\
&a^{1.41} = a^{\frac{141}{100}} = \left(\sqrt[100]{a}\right)^{141} \\
&a^{1.414} = a^{\frac{1414}{1000}} = \left(\sqrt[1000]{a}\right)^{1414} \\
&a^{1.4142} = a^{\frac{14\,142}{10\,000}} = \left(\sqrt[10\,000]{a}\right)^{14\,142} \\
&a^{1.41421} = a^{\frac{141\,421}{100\,000}} = \left(\sqrt[100\,000]{a}\right)^{141\,421}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

… …

… … … … …

ad esempio per $a = 3$ si avrà:

$$\begin{aligned}
&3^1 = 3\\
&3^{1.4} = 3^{\frac{14}{10}} = \left(\sqrt[10]{3}\right)^{14} \simeq 4.65\\
&3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = \left(\sqrt[100]{3}\right)^{141} \simeq 4.70\\
&3^{1.414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = \left(\sqrt[1000]{3}\right)^{1414} \simeq 4.727\\
&3^{1.4142} = 3^{\frac{14\,142}{10\,000}} = \left(\sqrt[10\,000]{3}\right)^{14\,142} \simeq 4.72873\\
&3^{1.41421} = 3^{\frac{141\,421}{100\,000}} = \left(\sqrt[100\,000]{3}\right)^{141\,421} \simeq 4.72879\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{32}$$

è naturale a questo punto considerare i numeri reali:

$$\begin{aligned}
&3^1 = 3\\
&3^{1.4} \simeq 4.65\\
&3^{1.41} \simeq 4.70\\
&3^{1.414} \simeq 4.727\\
&3^{1.4142} \simeq 4.72873\\
&3^{1.41421} \simeq 4.72879\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{33}$$

come successive approssimazioni del numero $3^{\sqrt{2}}$, ed in generale

$$a^{1}$$
$$a^{1.4}$$
$$a^{1.41}$$
$$a^{1.414}$$
$$a^{1.4142}$$
$$a^{1.41421}$$

... ...

... ...

successive approssimazioni di $a^{\sqrt{2}}$: in tutto ciò è però essenziale che sia $a > 0$, in quanto solo per valori positivi della base sono definite tutte le approssimazioni. Infatti ad esempio (riducendo l'esponente ai minimi termini)

$$a^{\frac{14}{10}} = a^{\frac{7}{5}} = \left(\sqrt[5]{a}\right)^{7} \tag{35}$$

sarebbe definita per a reale qualsiasi (anche negativo essendo l'indice del radicale dispari). Ma invece la successiva (non avendo 141 e 100 fattori comuni):

$$a^{\frac{141}{100}} = \left(\sqrt[100]{a}\right)^{141} \tag{36}$$

sarebbe definita per solo per a non negativi (indice del radicale pari). Per $a > 0$ invece, come abbiamo visto, non ci sono problemi: tutte le approssimazioni sono definite (Il motivo per cui escludiamo $a = 0$ è poi dovuto al fatto che 0^0 non ha significato).

Conclusione:

per un reale $a > 0$ *e* per α reale qualsiasi è sempre definita la potenza :

$$a^{\alpha}$$

Si può infine dimostrare che che anche per esponenti reali continuano a valere tutte le proprietà delle potenze viste finora.

Curiosità finale: le prime 100 cifre decimali di $3^{\sqrt{2}}$:

$$4.728804387837414947894283340416005366839716424254840000789382064017840312713095694467933192221216414 \quad (38)$$