Insieme ℝ dei numeri reali

Abbiamo visto nel modulo precedente che a ciascuna frazione che esprima il rapporto di due numeri interi è sempre possibile, dividendo il numeratore per il denominatore, far corrispondere un numero decimale periodico (che in casi particolari può coincidere con un decimale finito o con un intero: in entrambe i casi il periodo è zero, salvo che un decimale finito ha un antiperiodo e invece un intero non ha antiperiodo). Viceversa ad un decimale periodico si può far corrispondere sempre una frazione costituita da un rapporto di numeri interi, mediante la regola della frazione generatrice che dovresti avere studiata (prometto di non indagare all'esame: anche perchè non sono certo di ricordarla bene neanche io). Quindi in pratica l'insieme ℚ dei numeri razionali è costituito da tutti i numeri decimali periodici, inclusi i decimali finiti e gli interi che abbiamo considerato come casi particolari dei periodici.

Numeri irrazionali:

Si chiamano invece *numeri irrazionali* quelli rappresentati da numeri decimali con un numero infinito di cifre dopo la virgola (ma io uso il punto!) ma ***non** periodici*.
L'attributo *irrazionale* significa semplicemente che essi non sono ottenibili, come invece accade per i razionali, da un rapporto di due numeri interi (in latino *ratio* significa rapporto)

Esempi

- E' irrazionale il numero
  0.1010010001000010000001 ... ...

scritto utilizzando le due cifre 0 e 1 e ottenuto facendo seguire al primo 1 uno zero, al secondo 1 due zeri, al terzo 1 tre zeri e così via.

Quindi è impossibile ottenere questo numero dividendo tra loro due numeri interi!

- Estraendo la radice quadrata del numero 2 si ottiene un numero decimale 1.414213...... infinito e non periodico; pertanto $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.

Nota bene: il fatto che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale *non* può essere dimostrato applicando la regola di estrazione della radice quadrata in quanto tale regola

fornisce, per quanto si voglia andare avanti, sempre un numero finito di cifre decimali e quindi a priori non potremmo mai essere certi che dopo le cifre

decimali calcolate il numero in questione non diventi periodico. In realtà si può dimostrare semplicemente e direttamente l'irrazionalità di $\sqrt{2}$

facendo vedere che non esiste alcun rapporto $\frac{m}{n}$ di numeri interi tale che risulti $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

- Se si misura la lunghezza di una circonferenza prendendo come unità di misura il suo diametro, come noto il diametro è contenuto nella circonferenza 3 volte;

$\frac{1}{10}$ del diametro è contenuta nella parte residua 1 volta; $\frac{1}{100}$ del diametro è contenuta nella parte ancora residua 4 volte, etc.

Andando avanti in questo modo si ottiene come misura della circonferenza il numero decimale 3.141592.... e si può dimostrare che anche questo numero, che viene indicato in genere con π, è irrazionale cioè illimitato e non periodico.

Numeri reali:

Considerando insieme i numeri razionali (siano essi interi o frazioni proprie) e gli irrazionali si ottiene l'insieme dei numeri reali, che si indica con $\mathbb{R}$
Anche per i reali è possibile definire le quattro operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, con l'unica eccezione della divisione per zero,
che danno sempre come risultato ancora un numero reale.

Modulo (valore assoluto) di un numero reale:

In analogia a quanto fatto per i numeri interi, si definisce il modulo o valore assoluto di un numero reale a con la posizione:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Esempi

$$|15| = 15 \qquad |0| = 0 \qquad |-15| = 15$$

$$|x-5| =$$

$$\begin{cases} x-5 & \text{se } x-5 \geq 0 \quad \text{cioè} \\ -(x-5) = 5-x & \text{se } x-5 < 0 \quad \text{cio} \end{cases} \tag{2}$$

quindi ad esempio $|x-5| =$
3 se $x = 8$ ed invece $|x-5| = 1$ se $x = 4$.