# Potenze ad esponente intero

In questo modulo e nei successivi, salvo esplicite precisazioni, indicheremo con una lettera minuscola dell'alfabeto latino un qualsiasi numero *reale*.
Quindi con $a \in \mathbb{R}$ (leggi $a$ appartenente all'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali: brevemente $a$ reale) indicheremo un numero che può rappresentare o una frazione (intero, decimale finito o periodico) oppure un irrazionale (decimale infinito non periodico).

**Potenze ad esponente intero positivo o nullo:**

dato il numero reale $a$ qualsiasi ed un numero intero positivo $m$ si definisce la *m-esima* potenza di $a$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fattori}} & m > 1 \\ a^1 = a \end{cases} \tag{1}$$

se $a \neq 0$ si definisce anche:

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1 & a \neq 0 \\ 0^0 \text{ non ha significato} & \end{array} \tag{2}$$

in ogni caso si dice che $a$ è la *base* della potenza ed $m$ l'*esponente*.

Esempi

$$(-3)^4 = (-3)\,(-3)\,(-3)\,(-3) = 81$$

$$(-3)^3 = (-3)\,(-3)\,(-3) = -27$$

$$(-3)^1 = -3$$

$$(-3)^0 = 1$$

$$(0)^5 = 0\times 0\times 0\times 0\times 0 = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$\left(1-3^0\right)^0$ non ha significato essendo la base nulla

**Osservazione:**

La potenza $a^m$ , se $a > 0$ è sempre un numero positivo, qualunque sia l' esponente.
Se invece $a < 0$ allora $a^m$ è *positivo per m pari* ed invece *negativo per m dispari*.

Esempi

$$\left(\frac{-3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \qquad\qquad (4)$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

Altri esempi

△ le potenze successive
del numero 10 sono date da :
$10^0 = 1;\ 10^1 = 10;\ 10^2 = 100;$
$10^3 = 1000;\ 10^4 = 10\,000;\ 10^5 = 100\,000;$ etc. (5)
quindi al crescere dell' esponente
crescono anche le corrispondenti potenze

$\triangle$ le potenze successive

del numero $\frac{1}{10}$ sono date da :

$$\left(\frac{1}{10}\right)^0 = 1;\ \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{1}{10} = 0.1;$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 0.01;\ \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} = 0.001;$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10\,000} = 0.0001;$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100\,000} = 0.00001;\ \text{etc.}$$

quindi al crescere dell' esponente

le corrispondenti potenze decrescono

$\triangle$ le potenze successive del numero $-$

10 sono date da :

$$(-10)^0 = 1;\ (-10)^1 = -10;$$

$$(-10)^2 = 100;\ (-10)^3 = -1000;$$

$$(-10)^4 = 10\,000;\ (-10)^5 = -100\,000;\ \text{etc.} \qquad (7)$$

questa volta al crescere dell' esponente

le corrispondenti potenze crescono

in valore assoluto, ma prese col loro

segno alternano valori positivi *e* negativi.

$\triangle$ le potenze successive

del numero $\frac{1}{10}$ sono date da :

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^0 = 1;\ \left(-\frac{1}{10}\right)^1 = -\frac{1}{10} = -0.1;$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 0.01;$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^3 = -\frac{1}{1000} = -0.001;$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10\,000} = 0.0001;$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^5 = -\frac{1}{100\,000} = -0.00001;\ \text{etc.}$$

quindi al crescere dell' esponente
le corrispondenti potenze decrescono
in valore assoluto ma assumono valori
con segni alterni positivi *e* negativi.

**Operazioni con le potenze:**

Dalle definizioni date si ricavano immediatamente le seguenti proprietà delle potenze ad esponente intero positivo:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (p1)

2. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ per $a \neq 0$ e $m > n$ (p2)

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(p3)

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (p4)

5. $(a \cdot b)^m = a^m\, b^m$ (p5)

Esempi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \qquad (9)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2}\, \frac{3^2}{4^2} = \frac{1}{4}\, \frac{9}{16} = \frac{9}{64}$$

**Nota bene:**

La posizione $a^0 = 1$ ci permette di estendere la (p2) anche al caso $m=n$, come si vede anche in uno degli esempi precedenti:

$$a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} \; (= 1) = a^{m-m} = a^0 = 1 \tag{10}$$

**Potenze ad esponente intero negativo:**

Dato il numero reale $a$ qualsiasi ed un numero intero positivo $m$ (e quindi - $m$ è negativo) si definisce la potenza $a^{-m}$ nel seguente modo:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \tag{11}$$

ne segue che la proprietà ($p$2) è valida in generale per $a \neq 0$ ed $m$ e $n$ interi qualsiasi:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{per } a \neq 0 \;\; e \;\; m, \; n \;\; \text{interi qualsiasi} \tag{12}$$

Esempi

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^{3} = 2^3 = 8$$

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

**Nota bene:**

Se il numero reale *a* è in particolare una frazione $\frac{p}{q} \neq 0$ allora per *m* intero positivo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^{m}} = \frac{1}{\frac{p^m}{q^m}} = \frac{q^m}{p^m} = \left(\frac{q}{p}\right)^{m} \tag{14}$$

Conclusione: la potenza ad esponente negativo - *m* di una frazione non nulla $\frac{p}{q}$ è uguale alla potenza con esponente opposto m (positivo) della frazione reciproca $\frac{q}{p}$ .

Esempi

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{7}\right)^{3} = \frac{64}{343}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{25}{9}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{3} = -\frac{125}{27}$$

Le potenze successive ad

$$\text{esponente positivo di } \frac{1}{10} \text{ sono :}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

... ... ... ... ... ... ... ... ...

Esercizi

Semplifica le espressioni che seguono:

$$\begin{aligned} &1.\quad \left(\frac{7}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{4}{7}\right)^5 \\ &2.\quad \left(\frac{7}{4}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^5 \\ &3.\quad \left(\frac{1}{7}\right)^{-7} \frac{1}{7}\ \frac{1}{7^3} \left(\frac{1}{7}\right)^3 \end{aligned} \tag{16}$$

Risposte

Tre modi diversi di esprimere l' unità. (17)