Logaritmi (definizioni)

Logaritmi e potenze:

Nel precedente modulo abbiamo detto che, dato il numero reale b ed un numero intero *positivo* n, se esiste un numero reale x tale che:

$$x^n = b \tag{1}$$

x è una *radice ennesima* di b. In sostanza quindi la ricerca di una radice consiste nella ricerca di una base incognita di una potenza.

Affrontiamo ora un problema analogo: dato il numero reale b qualsiasi ed un numero reale *positivo* a, se esiste un numero reale x tale che:

$$a^x = b \tag{2}$$

diremo che x è il *logaritmo* di b in base a. Quindi questa volta l'incognita è l'esponente e non più la base.

Esempi

- $2^x = 8$ è risolta per $x = 3$, infatti $2^3 = 8$ per cui diremo che 3 è il logaritmo di 8 in base 2
- $9^x = 81$ è risolta per $x = 2$, infatti $9^2 = 81$ per cui diremo che 2 è il logaritmo di 81 in base 9 (3)

- $5^x = 0.2$ è risolta per $x = -1$,

infatti $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0.2$ per cui diremo che -1 è il logaritmo di 0.2 in base 5

Se x è il logaritmo di b in base a scriveremo:

$$x = \log_a b \qquad a > 0 \tag{4}$$

Quindi per $a > 0$:

$$x = \log_a b \iff b = a^x \tag{5}$$

Esempi

- $3 = \log_2 8 \iff 2^3 = 8$
- $2 = \log_9 81 \iff 9^2 = 81$
- $-1 = \log_5 0.2 \iff 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0.2$
- $-2 = \log_{10} 0.01 \iff 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$
- $0.5 = \log_9 3 \iff 9^{0.5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $\frac{1}{3} = \log_{27} 3 \iff 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ (6)
- $-0.5 = \log_{16} \frac{1}{4} \iff 16^{-0.5} = 16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$
- $1 = \log_2 2 \iff 2^1 = 2$

- $1 = \log_3 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^1 = 3$
- $2 = \log_5 5^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 5^2 = 5^2$
- $48 = \log_5 5^{48} \quad \Longleftrightarrow \quad 5^{48} = 5^{48}$
- $-48 = \log_5 \frac{1}{5^{48}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{5^{48}} = 5^{-48}$

Continua tu:

Esercizi

vetrifica che

- $\log_2 1 = 0$
- $\log_5 1 = 0$
- $\log_a 1 = 0$ per qualsiasi a reale positivo
- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

Calcola (7)

- $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2}$
- $\log_{\frac{1}{2}} 8$
- $\log_{\frac{1}{8}} 2$

Come li avrei svolti io

Esercizi

- $\log_2 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^0 = 1$
- $\log_5 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 5^0 = 1$
- $\log_a 1 =$
  0 per qualsiasi a reale positivo $\quad \Longleftrightarrow \quad a^0 = 1$

- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

- $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

- $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 2^3 = 8$

- $\log_{\frac{1}{8}} 2 =$

$$-\frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ma quando esiste il logaritmo?

Dato un qualsiasi numero ed una qualsiasi base esiste sempre il logaritmo di quel numero nella data base? E ammesso che esista ce n'è uno solo o può accadere, come per le radici che ce ne sia più d'uno?
Cominciamo con calma:

Ricorda che :

$$\log_a b = x \qquad \text{se e solo se} \qquad a^x = b$$

ed allora

■ Se b è *reale positivo* ed a un *reale positivo diverso da* 1, allora l' equazione

$$a^x = b \qquad a > 0 \quad a \neq 1 \qquad b > 0 \tag{9}$$

ha una ed una sola

soluzione (il perchè sarà facilmente comprensibile durante il corso).

Quindi il logaritmo di un numero positivo in una base positiva diversa da 1 esiste sempre ed è unico.

■ Se b è *reale positivo* ed $a = 1$, allora l' equazione

$$1^x = b \qquad b > 0$$

non ha soluzioni se $b \neq 1$ (1 elevato ad una qualsiasi potenza è sempre 1), mentre invece ha infinite soluzioni se $b = 1$ ($1^x = 1$ per qualsiasi x). (10)

Quindi l' equazione $1^x = b$ *o* è impossibile ($b \neq 1$) oppure è indeterminata ($b = 1$); conclusione : non è definito il logaritmo in base 1.

■ Se b è *reale positivo* ed $a = \ < 0$, allora l' equazione

$$a^x = b \qquad b > 0 \qquad a < 0$$

ha soluzioni solo per *particolari* valori di b (ricorda che a^x è definita per ogni x reale solo se $a > 0$). (11)

Quindi *non* viene definito il logaritmo in *base negativa.*

■ Se b è *reale negativo* ed a positivo diverso da 1, allora l' equazione

$$a^x = b \qquad\qquad a > 0 \quad a \neq 1 \qquad b < 0$$

non ha
soluzioni : essendo la base positiva qualunque sia
l' esponente a^x non può essere negativo.
Quindi *non* è definito il
logaritmo di un *numero negativo*.

■ Infine anche se b =
0 ed a positivo diverso da 1, l' equazione

$$a^x = 0 \qquad\qquad a > 0 \quad a \neq 1$$

non ha (13)
soluzioni : essendo la base positiva qualunque
sia l' esponente a^x non può essere nullo.
Quindi *non* è definito il logaritmo di 0.

Conclusione

Il numero reale

$$x = \log_a b \tag{14}$$

è l'esponente al quale occorre elevare la base a per ottenere il numero b.
Esso è definito esclusivamente per ***a* positivo e diverso da 1** e per ***b* positivo** qualsiasi. In tal caso (cioè $0 < a \neq 1$ e $b > 0$) l'equazione:

$$x = \log_a b \tag{15}$$

ha una ed una sola soluzione che viene appunto indicata con:

$$x = \log_a b \qquad 0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0 \tag{16}$$

Osservazione

■ Qualunque sia la base a (purchè $a > 0$ e $a \neq 1$) si ha sempre

$$a^0 = 1 \quad \text{per cui} \quad \log_a 1 = 0 \qquad 0 < a \neq 1 \tag{17}$$

cioè il logaritmo in qualsiasi base di 1 è 0.

■ Qualunque sia la base a (purchè $a > 0$ e $a \neq 1$) si ha sempre

$$a^1 = a \quad \text{per cui} \quad \log_a a = 1 \qquad 0 < a \neq 1 \tag{18}$$

cioè il logaritmo in qualsiasi base della stessa base è sempre uguale ad 1.

Avvertenza

Le basi che vengono in pratica utilizzate sono due. La prima è la base $a = 10$ che è particolarmente comoda per il calcolo manuale; i logaritmi calcolati in tale base vengono detti logaritmi decimali (o anche logaritmi di Briggs).
Più interessante dal punto di vista teorico, ed è il motivo per cui nel corso utilizzeremo solo quest'ultima, è la base fornita da un numero irrazionale, indicato usualmente con e ed il cui valore approssimato è 2.71828..... .
I logaritmi in base e vengono detti *logaritmi naturali* o anche logaritmi neperiani (dal loro inventore G.Napier).
I logaritmi naturali vengono in genere scritti senza indicare la base, cioè per convenzione:

$$\log b \equiv \log_e b \tag{19}$$

Sull'origine e sulle notevoli proprietà del numero e torneremo ampiamente durante il corso.

Esempi di logaritmi decimali

- $\log_{10} 0.01 =$

  $$\log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} \frac{1}{10^2} = \log_{10} 10^{-2} = -2$$
- $\log_{10} 0.1 =$

  $$\log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} \frac{1}{10^1} = \log_{10} 10^{-1} = -1 \tag{20}$$
- $\log_{10} 1 = \log_{10} 10^0 = 0$
- $\log_{10} 10 = \log_{10} 10^1 = 1$
- $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$