

Proprietà dei logaritmi

Dalle proprietà delle potenze discendono le analoghe proprietà dei logaritmi: la prima che riguarda il logaritmo di un prodotto la dimostriamo per vedere come appunto si ricavi da una proprietà delle potenze. Le altre le riporto senza dimostrazione. Per non appesantire le formule non specifico più le limitazioni sulla base dei logaritmi e sul loro argomento: si intende che tutti i logaritmi in gioco siano "legali".

Logaritmo di un prodotto:

Se:

$$\begin{aligned}y_1 &= a^{x_1} \iff x_1 = \log_a y_1 \\y_2 &= a^{x_2} \iff x_2 = \log_a y_2 \\y_1 \cdot y_2 &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} = & (1) \\a^{x_1+x_2} &\iff x_1 + x_2 = \log_a(y_1 \cdot y_2) \iff \log_a y_1 + \\&\log_a y_2 = \log_a(y_1 \cdot y_2)\end{aligned}$$

quindi in conclusione abbiamo la prima proprietà:

$$\bullet \quad \log_a(y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2 \quad (\text{P1})$$

cioè il *logaritmo del prodotto* di due numeri è uguale alla *somma dei logaritmi* dei singoli numeri.

Esempi

$$\begin{aligned}\bullet \quad \log_2 32 &= \\ \log_2(4 \times 8) &= \log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3 =\end{aligned}$$

$$2 + 3 = 5 \text{ (ma anche direttamente } \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5)$$

- $\log_{10} 80 = \log_{10}(8 \times 10) = \log_{10} 8 + \log_{10} 10 = \log_{10} 8 + 1$
- $\log_{10} 800 = \log_{10}(8 \times 100) = \log_{10} 8 + \log_{10} 10^2 = \log_{10} 8 + 2$

Attenzione

Nella proprietà P1 appare la somma di due logaritmi (al secondo membro) e **non** il logaritmo di una somma, per il quale non esiste alcuna regola generale di riduzione ai logaritmi dei singoli addendi!

$$\log_a(y_1 + y_2) = ?? \text{ ?????} \quad (3)$$

Logaritmo di un quoziente:

Procedendo come nel caso precedente si ha la seconda regola:

$$\bullet \quad \log_a \frac{y_1}{y_2} = \log_a y_1 - \log_a y_2 \quad (\text{P2})$$

cioè il *logaritmo del quoziente* di due numeri è uguale alla *differenza dei logaritmi* del numeratore e del denominatore.

Esempio

$$\bullet \quad \log_{10} \frac{\sqrt{800}}{\sqrt[3]{1000}} = \log_{10} \sqrt{800} - \log_{10} \sqrt[3]{1000} =$$

$$\begin{aligned}
 \log_{10} \sqrt{10^2 \cdot 8} - \log_{10} \sqrt[3]{10^3} &= \\
 \log_{10}(10 \cdot \sqrt{8}) - \log_{10} 10 &= \\
 \log_{10} 10 + \log_{10} \sqrt{8} - \log_{10} 10 &= \log_{10} \sqrt{8}
 \end{aligned}$$

Osservazione

Da quest'ultima regola si ha:

$$\log_a \frac{1}{y} =$$

$$\log_a 1 - \log_a y = -\log_a y \quad (\text{P2a})$$

Quindi il logaritmo del reciproco di un numero è uguale all'opposto del logaritmo del numero stesso.

Esempio

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad -3 &= \log_{10} 10^{-3} = \\
 \log_{10} \frac{1}{1000} &= -\log_{10} 1000 = -\log_{10} 10^3 = -3 = \quad (5)
 \end{aligned}$$

Logaritmo di una potenza:

Terza regola: per m reale qualsiasi

$$\bullet \quad \log_a b^m = m \log_a b \quad (\text{P3})$$

Esempi

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \log_{10} 7^5 &= 5 \log_{10} 7 \\
 \bullet \quad \log_{10} 10^5 &= 5 \log_{10} 10 = 5 \\
 \bullet \quad \log_3 \sqrt[7]{81} &=
 \end{aligned}$$

$$\log_3 \sqrt[7]{3^4} = \log_3 3^{\frac{4}{7}} = \frac{4}{7} \log_3 3 = \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{4}{7}$$

$$\bullet \log_{10} \sqrt{1000} =$$

$$\log_{10} \sqrt{10^3} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 10 = \frac{3}{2}$$

Logaritmi in basi diverse:

La quarta regola riguarda il passaggio del logaritmo di un dato numero da una base ad un'altra. Supponiamo cioè di avere due basi a e c (entrambi i numeri positivi e diversi da 1); si dimostra allora la seguente regola di passaggio da una base all'altra:

$$\bullet \log_a b = \log_c b \log_a c \quad (\text{P4})$$

In particolare, se oltre alla generica base a consideriamo la base naturale $c = e$, si avrà:

$$\blacksquare \log_a b = \log b \log_a e \quad (\text{P4a})$$

$$\blacksquare \log b = \frac{\log_a b}{\log_a e} \quad (\text{P4b})$$

Useremo queste ultime due relazioni durante il corso: tienile pronte!

Esempi

$$\bullet \log_{10} 81 =$$

$$\log_3 81 \log_{10} 3 = \log_3 3^4 \log_{10} 3 = 4 \log_{10} 3$$

(ovviamente si poteva fare *a* meno di quest'

$$\text{ultima regola : } \log_{10} 81 = \quad (7)$$

$$\log_{10} 3^4 = 4 \log_{10} 3)$$

$$\begin{aligned} \bullet \log_3 100 &= \log_{10} 100 \log_3 10 = \\ &\log_{10} 10^2 \log_3 10 = 2 \log_3 10 \end{aligned}$$