NUMERI INTERI

Naturali ed interi

I numeri:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad \dots\dots.. \qquad (1)$$

sono detti *Numeri Naturali* e sono quelli usati per contare. Il loro insieme si indica con $\mathbb{N}$.

Invece:

$$+1,\quad +2,\quad +3,\quad +4,\quad +5,\quad +6,\quad \dots\dots\dots \qquad (2)$$

sono i numeri Interi positivi e possono essere in pratica considerati come coincidenti con i naturali; si scrivono spesso senza indicare il segno + esplicitamente.

Gli interi negativi sono:

$$\dots\quad \dots\dots\dots\quad -6,\quad -5,\quad -4,\quad -3,\quad -2,\quad -1 \qquad (3)$$

L'insieme dei numeri *Interi* (detti anche *interi relativi*), indicato con $\mathbb{Z}$, comprende gli interi positivi, i negativi e lo zero al quale non viene attribuito alcun segno :

$$\begin{array}{l} \dots\quad \dots\dots\dots\quad -6,\quad -5,\quad -4, \\ -3,\quad -2,\quad -1,\quad \mathbf{0},\quad +1,\quad +2, \\ +3,\quad +4,\quad +5,\quad +6,\quad \dots\dots..\quad \dots\dots \end{array} \qquad (4)$$

Nota bene:

Spesso per indicare il fatto che quello che stiamo dicendo vale non solo per *un particolare* numero dell'insieme precisato (al momento conosciamo solo $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$), ma per un *qualsiasi* numero dell'insieme specificato, utilizzeremo una lettera minuscola dell'alfabeto latino tipo ***m*** o ***n***, etc.

Precisazione importante: Quindi se l'insieme di riferimento è $\mathbb{N}$, ad esempio con la lettera ***m*** possiamo indicare uno qualsiasi dei numeri 0, 1, 2, 3, ...
Se invece l'insieme di riferimento è $\mathbb{Z}$ allora con ***m*** possiamo indicare un qualsiasi intero relativo: bada bene che in tal caso ***m***, pur non essendo evidenziato esplicitamente il suo segno, può rappresentare *sia un numero positivo, sia un negativo sia il numero zero.*

Operazioni aritmetiche sui numeri naturali

OPERAZIONI DIRETTE:
Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali sono *sempre* definite le due operazioni di **addizione** e **moltiplicazione**.

Precisazione: che significa che sono *sempre* definite? Semplicemente che dati due numeri naturali *qualsiasi*, addizionandoli si ottiene sempre un numero dello stesso tipo, cioè ancora un naturale, che prende il nome di **somma** dei due numeri dati; analogamente moltiplicando due numeri naturali qualsiasi si ottiene ancora un numero naturale che è il **prodotto** dei due numeri.

Nota bene: Quindi la **somma** di due numeri è il risultato dell'operazione di **addizione**, il **prodotto** il risultato della **moltiplicazione**.

Esempi:

$5 + 3 = 8 \qquad 5 \times 3 = 15$ (spesso la moltiplicazione si indica anche con : $5 \cdot 3 = 15$)

l'addizione di 5 e 3 ha come somma il numero naturale 8 e la loro moltiplicazione il prodotto 15.

In genere per semplicità diremo semplicemente che "8 è la somma di 5 e 3" e "15 è il prodotto di 5 per 3" omettendo il riferimento esplicito alle relative operazioni.

OPERAZIONI INVERSE:
A partire dalle due operazioni di **addizione** e **moltiplicazione** è possibile definire le loro *inverse* che però nell'ambito dei naturali non sono sempre definite..

Sottrazione:
Dati due numeri naturali qualsiasi ***m*** ed ***n***, diversi tra loro, è sempre possibile esprimere uno solo dei due come somma dell'altro e di un opportuno numero naturale ***d***, individuabile in modo univoco:

Esempio:
Dati i due numeri naturali ***m = 15*** ed ***n = 7***, esiste il (solo) numero naturale ***d = 8***, tale che ***m = n + d ,*** cioè ***15 = 7 + 8.***
Diremo allora che ***d = 8*** è la differenza tra ***m = 15*** ed ***n = 7*** e scriveremo: ***m - n = d***.

In generale diremo che:

$$\boldsymbol{m - n = d} \quad (\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{d} \text{ naturali}) \quad \text{se } e \text{ solo se} \quad \boldsymbol{m = n + d} \tag{6}$$

Quindi la sottrazione è definita a partire dall'addizione: è la sua operazione inversa.

Attenzione:
Se:

$$\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} = \boldsymbol{d} \qquad (\text{esempio } 15 - 7 = 8) \tag{7}$$

allora nell'ambito dei naturali non è possibile l'operazione:

$$\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m} \quad (\text{esempio } 7 - 15 = ?) \tag{8}$$

in quanto non esiste un naturale che addizionato a 15 dia come somma 7: la sottrazione non è sempre definita nell'ambito dei naturali.

Divisione:
Dati due numeri naturali qualsiasi $\boldsymbol{m}$ ed $\boldsymbol{n}$, diversi tra loro, solo in particolari casi è possibile esprimere uno dei due come prodotto dell'altro e di un opportuno numero naturale $\boldsymbol{q}$, *individuabile in modo univoco*:

Esempio:
Dati i due numeri naturali $\boldsymbol{m = 15}$ ed $\boldsymbol{n = 7}$, non esiste alcun numero naturale $\boldsymbol{q}$ tale che risulti $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}$ cioè $\boldsymbol{15 = 7 \cdot q}$ (e neanche $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{q}$).
Dati invece $\boldsymbol{m = 15}$ ed $\boldsymbol{n = 5}$, esiste il solo numero naturale $\boldsymbol{q = 3}$ tale che risulti $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}$ (cioè $\boldsymbol{15} = \boldsymbol{5} \cdot \boldsymbol{3}$): si dice allora che:
- $\boldsymbol{m = 15}$ è **divisibile** per $\boldsymbol{n = 5}$
- $\boldsymbol{q = 3}$ è il **quoziente**, cioè il risultato della divisione di $\boldsymbol{m = 15}$ per $\boldsymbol{n = 5}$.

Si dice poi anche che:

- $n = 5$ è un **divisore** di $m = 15$
- $m = 15$ è un **multiplo** di $n = 5$

In generale diremo che:

$$m : n = q \quad (m,\ n,\ q \text{ naturali}) \qquad \text{se } e \text{ solo se} \quad m = n \cdot q \tag{9}$$

Attenzione:
Perchè il numero m sia divisibile per n non solo deve esistere un opportuno numero q , tale che $m = n \cdot q$, ma tale numero deve essere *individuabile in modo univoco*.
C'è però un caso in cui ciò non è possibile: consideriamo infatti il caso in cui $n = 0$:

$$m : 0 = q \qquad \text{se } e \text{ solo se} \quad m = 0 \cdot q \tag{10}$$

e a questo punto occorre distinguere due casi:

- $m \neq 0$ (ad esempio $m = 15$) ed allora *non esiste* alcun numero q tale che $0 \cdot q = m$ (=15), per cui la *divisione è impossibile*.
- $m = 0$ ed allora *esistono infiniti* numeri q tali che $0 \cdot q = 0$ (qualunque sia q moltiplicato per zero da sempre come prodotto zero). Quindi in questo caso il risultato della divisione è *indeterminato* (non è individuato in modo univoco): anche in questo caso la *divisione è impossibile*.

Conclusione da non dimenticare:
Per qualsiasi m l'espressione $m : 0$ non ha significato. In particolare, nell'ambito delle operazioni aritmetiche, è priva di significato l'espressione $0 : 0$

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo:
Ti ho ricordato i concetti di divisore e multiplo di un numero. Ad esempio il numero 12 ha come divisore 2, infatti 12 : 2 = 6; ma anche 3 è un suo divisore, 12:3=4; e ancora 4 e 6 sono altri due divisori di 12 (12:4=3 e 12:6=2). Poi però non ce ne sono altri: (tutti) i divisori di 12 sono **2**, **3**, 4, **6** . Invece 30 ha come divisori (verifica) **2**, **3**, 5, **6.** Quindi i due numeri 12 e 30 hanno dei divisori comuni (evidenziati in grassetto): 2, 3, 6. Il più grande dei divisori comuni, che nel nostro caso è 6, prende il nome di **Massimo comune divisore** dei due numeri 12 e 30.
Considerazioni analoghe per i multipli comuni: ad esempio, poichè $36=4 \cdot 9$, ma anche $36=6 \cdot 6$ possiamo dire che 36 è un multiplo comune di 4 e 6. Ma anche 12 è multiplo comune di 4 e 6 ($12=3 \cdot 4$ e $12=2 \cdot 6$). E' facile poi vedere che non esistono altri multipli comuni a 4 e 6 più piccoli di 12: per questo motivo si dice che 12 è il **minimo comune multiplo** dei due numeri 4 e 6.

Operazioni aritmetiche sui numeri interi

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi sono *sempre* definite le due operazioni dirette di **addizione** e **moltiplicazione** e l'inversa della prima, cioè la **sottrazione.**

Premessa: per ricondurre le operazioni di addizione e moltiplicazione alle analoghe viste per i numeri natuarali conviene introdurre il concetto di modulo (o valore assoluto) di un numero dotato di segno.

Modulo o valore assoluto:

Dato il numero $\boldsymbol{m}$ il suo modulo, o valore assoluto, si indica con $|\boldsymbol{m}|$ e si pone uguale al numero $\boldsymbol{m}$ stesso se quest'ultimo è positivo o uguale a zero, oppure gli si cambia segno (rendendolo positivo) nel caso sia negativo. Quindi il modulo di un numero o è nullo (nell'unico caso in cui il numero è zero) oppure è sempre positivo.
Esempi:

- $|0| = 0$
- $|+\boldsymbol{5}| = +5$ (11)
- $|-\boldsymbol{5}| = +5$

Addizione

Dati due numeri interi $\boldsymbol{m}$ ed $\boldsymbol{n}$ la loro somma $\boldsymbol{s}$ si ottiene dagli addendi $\boldsymbol{m}$ ed $\boldsymbol{n}$ nel seguente modo:
■ se i due numeri $\boldsymbol{m}$ ed $\boldsymbol{n}$ hanno lo stesso segno la loro somma $\boldsymbol{s}$ si ottiene sommando i loro moduli ed attribuendo il segno comune ai due addendi
■ se i due numeri $\boldsymbol{m}$ ed $\boldsymbol{n}$ hanno segni opposti si confrontano tra loro i loro moduli dopodichè $\boldsymbol{s}$ si ottiene sottraendo dal modulo maggiore quello minore ed attribuendo al risultato il segno dell'addendo di modulo maggiore.

Esempi:

- $(+3) + (+4) = +7$
- $(-3) + (-4) = -7$
- $(-3) + (+4) = +1$ (12)
- $(+3) + (-4) = -1$

Moltiplicazione

Dati due numeri interi ***m*** ed ***n*** il loro prodotto ***p*** si ottiene da ***m*** ed ***n*** moltiplicandone i valori assoluti ed attribuendo al risultato il segno + se ***m*** ed ***n*** hanno lo stesso segno,
ed invece il segno - se hanno segni opposti.

Esempi:

$$\begin{array}{l} \bullet\ (+3)\cdot(+4) = +12 \\ \bullet\ (-3)\cdot(-4) = +12 \\ \bullet\ (-3)\cdot(+4) = -12 \\ \bullet\ (+3)\cdot(-4) = -12 \end{array} \qquad (13)$$

Opposto di un numero relativo:

Dato il numero ***m*** il suo opposto, che si indica con **-** ***n***, si ottiene moltiplicandolo per **-1**.
Esempi

$$\begin{array}{l} \bullet\ \text{se } m = +5 \ \text{ allora } \ -m = -5 \\ \bullet\ \text{se } m = -5 \ \text{ allora } \ -m = +5 \\ \bullet\ \text{se } m = 0 \ \ \text{ allora } \ -m = 0 \end{array} \qquad (14)$$

Osservazione: quando ***m*** è positivo il suo opposto **-** ***m*** è un numero negativo, quando invece ***m*** è negativo il suo opposto **-** ***m*** è un numero positivo!

Sottrazione

Dati due numeri interi ***m*** ed ***n*** la loro differenza ***m*** - ***n*** è sempre definita e si ottiene sommando ad ***m*** l'opposto di ***n***:

$$\boldsymbol{m - n = m + (-n)} \qquad (15)$$

Esempi:

- $(+3) \boldsymbol{-} (+4) = (+3) \boldsymbol{+} (-4) = -1$

- $(-3) - (-4) = (-3) + (+4) = +1$
- $(-3) - (+4) = (-3) + (-4) = -7$
- $(+3) - (-4) = (+3) + (+4) = +7$

Disuguaglianze

Dati i numeri interi m ed n diremo che:

■ ***m*** è *maggiore* di ***n*** e scriveremo:

$$\boldsymbol{m > n} \tag{17}$$

se il numero ***m-n*** è *positivo*

■ ***m*** è *minore* di ***n*** e scriveremo:

$$\boldsymbol{m < n} \tag{18}$$

se il numero ***m-n*** è *negativo*

Esempi

- $8 > 5$ infatti $8 - 5 = +3$
- $8 > -5$ infatti $8 - (-5) = +13$
- $8 > -8$ infatti $8 - (-8) = +16$
- $-8 > -10$ infatti $-8 - (-10) = +2$ (19)
- $0 < 8$ infatti $0 - (+8) = -8$
- $0 > -8$ infatti $0 - (-8) = +8$
- $-1 > -2$ infatti $-1 - (-2) = +1$

Nota bene: le relazioni > e < viste finora indicano disuguaglianze in *senso stretto*. E' comodo però considerare anche le due disuguaglianze in *senso debole*:

■ ***m*** è *maggiore* o *uguale* ad di ***n*** e scriveremo:

$$\boldsymbol{m \geq n} \tag{20}$$

che significa che vale una ed una sola delle relazioni:

$$\boldsymbol{m > n} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{m = n} \tag{21}$$

■ $\boldsymbol{m}$ è *minore* o *uguale* ad di $\boldsymbol{n}$ e scriveremo:

$$\boldsymbol{m \leq n} \tag{22}$$

che significa che vale una ed una sola delle relazioni:

$$\boldsymbol{m < n} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{m = n} \tag{23}$$

Esempi

- $3 \geq 2$ (in questo caso vale la relazione $3 > 2$)
- $2 \geq 2$ (in questo caso vale la relazione $2 = 2$)
- $2 \leq 2$ (in questo caso vale la relazione $2 = 2$)
- $1 \leq 2$ (in questo caso vale la relazione $1 < 2$)
- Consideriamo la disuguaglianza
  (x numero intero qualsiasi) :

$$x \leq 1$$

se $x = -5$,
la diseguaglianza che si ottiene sostituendo $-$
5 al posto di x , cioè $-5 \leq 1$,
è una disuguaglianza vera, (24)
mentre invece non è più vera se $x = +5$.
Per quali dei seguenti valori
di x tale disuguaglianza è vera :

a. $x = -1$
b. $x = +2$

$c.\quad x = +1$

$d.\quad x = -2$

$e.\quad x = 0$

Risposta : Vedi R1 in fondo modulo.

- Con riferimento all' esercizio precedente individua tutti i valori di x) interi = per i quali la disuguaglianza $x \leq$ 1 è vera e tutti quelli per cui è falsa. Risposta : R2 in fondo. (25)

Risposte:

R1. a. vera; b. falsa; c. vera; d. vera; e. vera

R2. vera per x =.....-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1

falsa per x = +2, +3, +4, +5, ...