Laboratorio di
Matematica Finanziaria con Excel

Antonio Grande

Dip. MEtodi e MOdelli per l'economia,
il TErritorio e la Finanza

aggiornato 8 maggio 2020

Si ringraziano:
la Prof.ssa Anna Attias,
il Prof. Sergio Bianchi(*)
cui si deve gran parte di questo materiale,
(*)www.docente.unicas/sergio_bianchi
la Prof. Giuseppina Bruno
per il progetto del corso,
il Prof. Stefano Patrì.

Matematica Finanziaria

Branca della matematica applicata
che si occupa di modellizzare
le operazioni finanziarie
(attività di scambio di denaro).

Operazione Finanziaria (of)

Contratto di cessione temporanea di un capitale
tra due soggetti: il creditore ed il debitore.

Il debitore, il soggetto che riceve la somma di denaro, si impegna col creditore a:
- restituirgli il capitale avuto in prestito ad una data scadenza;
- versargli un compenso per la disponibilità del bene.

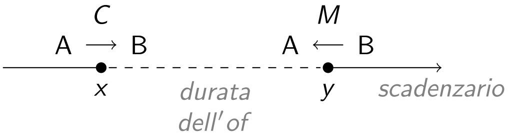
NOTA la somma ricevuta dal debitore differisce da quella versata al creditore per effetto del differimento temporale.
La loro valutazione sarà possibile solamente quando verranno riportate allo stesso istante di tempo.
Oggetto della matematica finanziaria è la costruzione di modelli matematici che spiegano come procedere nel confronto.

L'of elementare: lo scadenzario

Una operazione finanziaria (of) si può rappresentare in modo efficace con una modalità grafica che ha il pregio di evidenziare le date in cui avviene lo scambio di denaro.

A conferisce a B all'epoca x l'importo C, in cambio dell'importo M che B conferirà ad A all'epoca y (con $x < y$).

Potremo utilizzare la seguente rappresentazione:



Operazione Finanziaria: notazione

Un'of si può descrivere come un insieme di due o più coppie con la notazione:

$$F = \{(I_1, t_1), (I_2, t_2), \dots, (I_n, t_n)^{(*)}\}$$

in cui:

- $I_1, I_2, \dots, I_n =$ importi;
- $t_1, \dots, t_n =$ scadenze/epoche.

L'importo dell'operazione può essere positivo o negativo a seconda del soggetto che la valuta:
- segno negativo se costituisce un'uscita;
- segno positivo se costituisce un'entrata.

(*)nel caso di of complesse (vedi dopo)

L'of elementare: esempio

Acquisto oggi un Buono Ordinario del Tesoro (BOT)$^{(*)}$ al prezzo di 95,817$^{(*)}$ che incasserò tra un anno al prezzo 100. Ipotizzando che l'unità di misura sia l'anno e la data odierna sia t, si descriva l'of.

$$F = \{(-95.817, t), (100, t+1)\}$$

(*)Il Buono Ordinario del Tesoro è un titolo senza cedola, di durata 3, 6, 12 mesi. Viene emesso dallo Stato per finanziare il debito pubblico e prevede una liquidazione finale (valore nominale pari a 100).

(**)le relazioni della Matematica Finanziaria che illustreremo sono indipendenti dalla valuta delle unità monetarie (euro, dollari, yen, etc.).

L'of complessa: esempio

Acquisto oggi un'auto del valore di 15000 unità e pago 60 rate mensili dell'importo di 300 unità ciascuna. Ipotizzando che l'unità di misura sia il mese e la data odierna sia t, si descriva l'of [Bianchi, 2012].

$$F = \{(15000, t),(-300, t+1),(-300, t+2), \ldots$$
$$\ldots, (-300, t+60)\}$$

$300 * 60 = 18000 > 15000$

Classificazione delle of

L'o.f. è:

elementare $\# F = 2$ ovvero lo scambio è fra una prestazione ed una controprestazione;
complessa $\# F > 2$ ovvero lo scambio riguarda più prestazioni e/o controprestazioni.

a pronti/spot il prezzo viene concordato all'inizio dell'of;
a termine/forward il prezzo viene concordato ad un'epoca precedente a quella di scambio degli importi.

certa qualora entrambi gli elementi della coppia (I, t) sono deterministici, certi;
aleatoria qualora almeno uno degli elementi della coppia (I, t) non è stabilito a priori.

Il mercato dei capitali

Il prezzo delle operazioni di scambio di denaro cui abbiamo accennato si determina nel c.d. *Mercato dei capitali*.

Si distinguono due mercati: il mercato Perfetto ed il mercato Reale.
Il primo è quello cui ci riferiremo poiché, pur basandosi su delle ipotesi che non esistono nella realtà, permetterà di calcolare il prezzo del bene di cui ci occupiamo con estrema precisione.

Ipotesi del mercato Perfetto

- tutti i soggetti del mercato dispongono delle stesse informazioni;
- ogni soggetto massimizza il profitto;
- non ci sono costi (di intermediazione, fiscali, etc);
- assenza di arbitraggio (non esistino of a segni solo positivi);
- assenza di fattori aleatori (insolvenza, importi/scadenze variabili).

Il principio di equivalenza finanziaria

"È indifferente ricevere/cedere un importo immediatamente,
oppure riceverlo/cederlo in un'epoca successiva,
purché i due importi siano equivalenti
dal punto di vista finanziario[1]*."*

In simboli:

$$(C, x) \Leftrightarrow (M, y)$$

[1] avendo aggiunto, alla somma iniziale, un compenso per il prestito ricevuto

Un approfondimento sul principio di equivalenza finanziaria

Allo scopo di chiarire meglio il principio di equivalenza finanziaria consideriamo il seguente esempio valido per un soggetto operante all'interno del Mercato Perfetto:

il capitale di 1234, *tra* 2 *anni,*
è finanziariamente equivalente a 983 *oggi*

L'equivalenza suddetta prescinde da qualunque valutazione di carattere soggettivo: p.e. "sono pressato dai debitori quindi preferisco avere 983 subito" oppure "attendo del tempo, pagando magari una somma più alta; l'oggetto che mi interessa non ha eguali e sarà disponibile solo in quella data".

L'interesse e lo sconto

Abbiamo visto, per il principio di equivalenza finanziaria, che:

$$(C, x) \Leftrightarrow (M, y)$$

Consideriamo ora la stessa of nei due istanti x e y:

- noto C all'epoca x, vogliamo calcolare M all'epoca y. La somma che aggiungeremo all'importo iniziale C, che indicheremo con il simbolo I, è chiamata **interesse**. Sarà perciò:

  $$M = C + I \tag{1}$$

  Questa of si chiama **investimento/capitalizzazione** mentre la somma M si definisce con il termine **montante**. Abbiamo dunque valutato finanziariamente il capitale C ad un'epoca successiva;

L'interesse e lo sconto

- noto M vogliamo calcolare C all'epoca x. La somma che sottrarremo all'importo M, che indicheremo con il simbolo D, si chiama **sconto**. Sarà perciò:

$$C = M - D \tag{2}$$

  In questo caso l'of si chiama **sconto/anticipazione/ attualizzazione** mentre l'importo C si chiama **valore attuale**.
  Abbiamo dunque valutato finanziariamente il capitale M ad un epoca precedente.

L'interesse e lo sconto: osservazioni

Riepilogando possiamo affermare che per ogni $y > x$, sarà:

- $I, D > 0$;
- $I = D$ a condizione che la durata dell'of sia invariata;
- $C < M$.

L'interesse e lo sconto: esercizi

1. calcolare l'interesse dell'of di pagina 7$^{(*)}$;
2. calcolare lo sconto dell'of di pagina 8;
3. calcolato lo sconto dell'of di pagina 13, calcolare il montante della stessa operazione.

(*)tutti i riferimenti a numeri di pagine, riconoscibili perché privi di parentesi, oppure a formule, riconoscibili perché provvisti di parentesi, sono raggiungibili facendo clic con il mouse.

La funzione valore

Il principio di equivalenza finanziaria e le condizioni vigenti nel Mercato Perfetto, comportano che ad una determinata terna C, x, y, corrisponda un unico valore, equivalente finanziario di M. Possiamo quindi scrivere la seguente relazione:

$$M = f(C, x, y) \tag{3}$$

Si tratta della c.d. *funzione valore*. Essa è continua e non negativa per $C \geq 0$, in tutto l'intervallo $x, y \geq 0$ nonché monotona.

La funzione, detta anche **legge di capitalizzazione**, è:

- crescente rispetto al capitale C, ossia $\frac{\partial f}{\partial C} > 0$; se $C \uparrow, f \uparrow$;
- crescente rispetto alla scadenza y, ossia $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$; se $y \uparrow, f \uparrow$;
- decrescente rispetto alla data x, ossia $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$; se $x \uparrow, f \downarrow$.

La funzione valore

Per ipotesi questa funzione è omogenea rispetto a C ovvero proporzionale rispetto al capitale. In altre parole se moltiplico C per una costante k, M risulterà pari a $M * k$. Potremo quindi scrivere:

$$M = f(C, x, y) = C \cdot f(1, x, y) \tag{4}$$

in cui $f(1, x, y)$ è il prezzo all'epoca y, di un'unità di capitale disponibile all'epoca x.

La funzione valore

Se la funzione valore è continua e strettamente crescente rispetto a C, esisterà la sua inversa (sempre rispetto a C) che permette di ricavare il valore attuale a partire dal montante. In questo caso avremo:

$$C = f^{-1}(M, x, y) \tag{5}$$

con cui possiamo calcolare il valore attuale C all'epoca x, equivalente finanziario dell'importo M disponibile all'epoca y. La funzione, monotona e non negativa, chiamata **legge di attualizzazione** o **funzione di sconto** è:

- decrescente rispetto alla scadenza y, ossia $\frac{\partial f^{-1}}{\partial y} < 0$; se $y - x \uparrow, f^{-1} \downarrow$;
- crescente rispetto ad x, ossia $\frac{\partial f^{-1}}{\partial x} > 0$; se $x \uparrow, f \uparrow$.

La funzione valore

Anche per questa funzione vale l'ipotesi di omogeneità rispetto a M. Per la proporzionalita della variabile indipendente M rispetto alla variabile dipendente C potremo scrivere:

$$C = f^{-1}(M, x, y) = M \cdot f^{-1}(1, x, y) \tag{6}$$

in cui $f^{-1}(1, x, y)$ è il prezzo all'epoca x, di un'unità di capitale disponibile all'epoca y.

Fattore di capitalizzazione e attualizzazione

È prassi indicare le funzioni di importo unitario $f(1, x, y)$ e $f^{-1}(1, x, y)$ rispettivamente con $r(x, y)$ e $v(x, y)$.

Conseguentemente, dalle relazioni (4) e (6), si ottiene:

$$r(x, y) = \frac{M}{C} \tag{7}$$

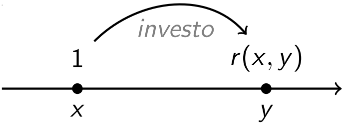
$$v(x, y) = \frac{C}{M} \tag{8}$$

Pertanto:

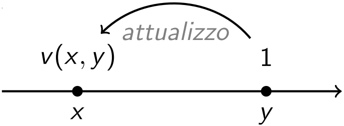
- $r(x, y)$ è il montante in y di un'unità monetaria disponibile in x;
- $v(x, y)$ è il valore attuale in x di un'unità monetaria disponibile in y.

Fattore di capitalizzazione e attualizzazione

La rappresentazione delle due funzioni sullo scadenzario è la seguente:



$r(x, y)$ è chiamato:
fattore di capitalizzazione.



$v(x, y)$ è chiamato: **fattore di attualizzazione**.

Relazione tra r e v

Abbiamo visto in 21, le relazioni (7) e (8).
Da esse si può affermare che:

$$r(x, y) \cdot v(x, y) = 1 \tag{9}$$

Il fattore di capitalizzazione e il fattore di sconto si dicono pertanto *coniugati*.
Dalla relazione precedente si ricava;

$$r(x, y) = \frac{1}{v(x, y)} \tag{10}$$

$$v(x, y) = \frac{1}{r(x, y)} \tag{11}$$

Il tasso di interesse periodale

Dalla (1) a pagina 14 si ricava:

$$M - C = I \tag{12}$$

Dividendo entrambi i membri per C si ottiene:

$$\frac{I}{C} = \frac{M - C}{C} = \frac{M}{C} - 1$$

La prima frazione a sinistra, che si identifica con il simbolo $i(x, y)$, è chiamato **tasso effettivo di interesse periodale**.

Il tasso di interesse periodale

In formule sarà:

$$i(x, y) = \frac{I}{C} = \frac{M}{C} - 1 \qquad (13)$$

che rappresenta l'interesse prodotto per ogni unità di capitale investita da x a $y^{(*)}$.
Se quindi $i(x, y) = 0.02$ diremo che nell'intervallo da x a y una unità monetaria produce un interesse di $0,02$ unità monetarie.

(*) il tasso di interesse è un "numero puro" ossia adimensionale perchè ottenuto dal rapporto di due grandezze omogenee.

Il tasso di sconto periodale

Dalla (2) si ricava:

$$M - C = D$$

Dividendo entrambi i membri per M si ottiene:

$$\frac{D}{M} = \frac{M - C}{M} = 1 - \frac{C}{M} \tag{14}$$

Il rapporto più a sinistra, che si identifica con $d(x, y)$, è chiamato **tasso effettivo di sconto periodale**.

Il tasso di sconto periodale

In formule sarà:

$$d(x, y) = \frac{D}{M} = 1 - \frac{C}{M} \tag{15}$$

che rappresenta lo sconto corrisposto per ogni unità di capitale disponibile all'epoca y, che viene anticipato all'epoca x $^{(*)}$.
Se quindi $d(x, y) = 0.05$ diremo che per una unità monetaria disponibile all'epoca y, anticipata all'epoca x, lo sconto corrisposto è pari a 0,05 unità monetarie.

$(*)$ anche il tasso di sconto è un numero puro.

Relazioni tra tasso di interesse e fattori di capitalizzazione/attualizzazione

$$\text{Abbiamo visto nella (13) che:} \quad i(x,y) = \frac{M}{C} - 1$$

$$\text{poiché dalla (7) era:} \quad r(x,y) = \frac{M}{C}$$

$$\text{abbiamo la relazione:} \quad i(x,y) = r(x,y) - 1 \qquad (16)$$

$$\text{Inoltre dalla (10) era:} \quad r(x,y) = \frac{1}{v(x,y)}$$

$$\text{che sostituito nella (16) ottiene:} \quad i(x,y) = \frac{1}{v(x,y)} - 1 \qquad (17)$$

$$\text{da cui:} \quad v(x,y) = \frac{1}{1+i(x,y)} \qquad (18)$$

Relazioni tra tasso di sconto e fattori di capitalizzazione/attualizzazione

$$\text{Abbiamo visto nella (15) che:} \quad d_{x,y} = 1 - \frac{C}{M}$$

$$\text{poiché dalla (8) era:} \quad v(x,y) = \frac{C}{M}$$

$$\text{abbiamo la relazione:} \quad d(x,y) = 1 - v(x,y) \qquad (19)$$

$$\text{Inoltre dalla (11) era:} \quad v(x,y) = \frac{1}{r(x,y)} \qquad (20)$$

$$\text{che sostituito nella (19) ottiene:} \quad d(x,y) = 1 - \frac{1}{r(x,y)} \qquad (21)$$

$$\text{da cui:} \quad r(x,y) = \frac{1}{1 - d(x,y)} \qquad (22)$$

Relazioni tra tasso di interesse e tasso di sconto

Dalla (17) si ricava: $$i(x,y) = \frac{1 - v(x,y)}{v(x,y)} \qquad (23)$$

e dalla (19) si ricava: $$v(x,y) = 1 - d(x,y) \qquad (24)$$

sostituendo la (24) nella (23): $$i(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 - d(x,y)} \qquad (25)$$

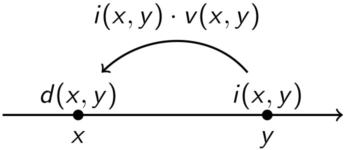
da cui: $$d(x,y) = \frac{i(x,y)}{1 + i(x,y)} \qquad (26)$$

Relazione tra tasso di interesse e sconto: significato finanziario

Dalla (26) portando fuori dal numeratore $i(x, y)$ otteniamo:

$$d(x, y) = i(x, y) \cdot \frac{1}{1 + i(x, y)} = i(x, y) \cdot v(x, y)$$

che interpreta il tasso di sconto come *valore attuale del tasso di interesse*.

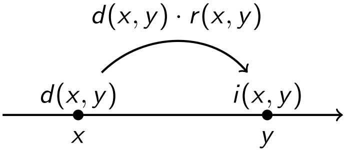


Relazione tra tasso di interesse e sconto: significato finanziario

Dalla (25) portando fuori dal numeratore $d(x,y)$ otteniamo:

$$i(x,y) = d(x,y) \cdot \frac{1}{1 - d(x,y)} = d(x,y) \cdot r(x,y)$$

che interpreta il tasso di interesse come *montante del tasso di sconto*.



Riepilogo delle relazioni fondamentali

	nella tabella si esprimono queste funzioni			
funzione di $\downarrow$	$r(x,y)$	$v(x,y)$	$i(x,y)$	$d(x,y)$
$r(x,y)$	$\cdots$	$\dfrac{1}{r(x,y)}$	$r(x,y)-1$	$\dfrac{r(x,y)-1}{r(x,y)}$
$v(x,y)$	$\dfrac{1}{v(x,y)}$	$\cdots$	$\dfrac{1-v(x,y)}{v(x,y)}$	$1-v(x,y)$
$i(x,y)$	$1+i(x,y)$	$\dfrac{1}{1+i(x,y)}$	$\cdots$	$\dfrac{i}{1+i(x,y)}$
$d(x,y)$	$\dfrac{1}{1-d(x,y)}$	$1-d(x,y)$	$\dfrac{d}{1-d(x,y)}$	$\cdots$

Leggi e regimi finanziari

Le relazioni $i(x, y) = r(x, y) - 1$ e $d(x, y) = 1 - v(x, y)$ sono leggi finanziarie unitarie chiamate rispettivamente **legge dell'interesse** e **legge dello sconto**.

Assieme alla legge del montante $r(x, y) = \frac{M}{C}$ e del valore attuale $v(x, y) = \frac{C}{M}$ anch'esse unitarie, costituiscono un insieme che definisce relazioni di equivalenza tra capitali in epoche diverse tra loro. Tale insieme si definisce, in matematica finanziaria, con il termine di **regime finanziario**.

I regimi finanziari

I regimi finanziari più diffusi, si distinguono tra loro per le relazioni funzionali che regolano la sottostante legge di capitalizzazione che può essere lineare, esponenziale o iperbolica. In corrispondenza abbiamo:

- il regime dell'interesse/capitalizzazione semplice;
- il regime dell'interesse/capitalizzazione composta;
- il regime dello sconto commerciale.

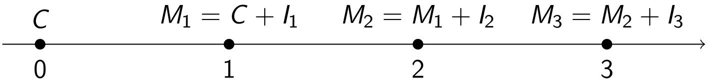
Nel seguito studieremo i primi due regimi, ipotizzando leggi di equivalenza finanziaria *uniformi* ossia dipendenti dalla durata dell'of (non dalle epoche). La legge del montante sarà:

$$r(x, y) = r(y - x) = r(n)$$

Per esempio $r(3, 5) = r(7, 9)$.

Il regime dell'interesse composto

Nel regime dell'interesse composto (RIC), l'of si divide in sottoperiodi di ampiezza costante; al termine di ciascun sottoperiodo, gli interessi maturati vengono aggiunti al capitale iniziale e la somma così ottenuta viene a sua volta capitalizzata producendo altri interessi e così via fino alla scadenza.
Sullo scadenziario sarà:



Il regime dell'interesse composto

Per praticità riportiamo lo scadenziario della pagina precedente.

C	$M_1 = C + I_1$	$M_2 = M_1 + I_2$	$M_3 = M_2 + I_3$
0	1	2	3

Si ipotizza che il tasso di interesse di ogni sottoperiodo sia costante **(struttura piatta dei tassi di interesse)**.
In simboli: $i(0,1) = i(1,2) = i(2,3) = i$; quest'ultimo è chiamato **tasso effettivo di interesse per periodo unitario** per distinguerlo dal tasso di interesse periodale $i(x, y)$.

Il regime dell'interesse composto

Il montante dell'of sarà:

- fine s.periodo 1; disinvestiamo e subito reinvestiamo. Sarà:
  $I_1 = C \cdot i$
  $M_1 = C + I_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i)$
- fine s.periodo 2; disinvestiamo e subito reinvestiamo. Sarà:
  $I_2 = M_1 \cdot i$
  $M_2 = M_1 + I_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1 \cdot (1 + i) = C(1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$
- fine s.periodo 3; disinvestiamo e subito reinvestiamo. Sarà:
  $I_3 = M_2 \cdot i$
  $M_3 = M_2 + I_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3$

Per induzione sarà:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n \qquad (27)$$

Il regime dell'interesse composto

$$M_n = C \cdot \underbrace{(1+i)}_{\text{r=fattore di cap.ne}}{}^{n}$$

e quindi la legge di capitalizzazione unitaria è:

$$r(n) = (1+i)^n = r^n \tag{28}$$

e, sfruttando le relazioni fondamentali:

$$v(n) = \frac{1}{(1+i)^n} = v^n \tag{29}$$

$$i(n) = r^n - 1 = (1+i)^n - 1 = i^n \tag{30}$$

$$d(n) = 1 - v^n = 1 - (1+i)^{-n} = d^n \tag{31}$$

Il regime dell'interesse composto

Dalle relazioni (28), (29), (30), (31) possiamo calcolare i corrispondenti valori per importi non unitari.

$$M = C \cdot (1+i)^n \quad \text{il montante di } C. \tag{32}$$

$$C = M \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{il v. a. di } M. \tag{33}$$

$$I = C \cdot [(1+i)^n - 1] \quad \text{l'interesse su } C. \tag{34}$$

$$D = M \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] \quad \text{lo sconto di } M. \tag{35}$$

Il regime dell'interesse composto: calcolo della durata

Dalla (32) possiamo ricavare la durata n. Se infatti:

$$\frac{M}{C} = (1+i)^n \tag{36}$$

passando ai logaritmi sarà:

$$log\left(\frac{M}{C}\right) = n \cdot log(1+i)$$

$$\text{da cui} \qquad n = \frac{log\left(\frac{M}{C}\right)}{log(1+i)} \tag{37}$$

NOTA per la regola del cambio di base nei logaritmi, nella (37) è possibile calcolare il logaritmo in qualunque base.
In Excel la funzione log() calcola il log_{10}, la funzione ln() calcola log_2.

Il regime dell'interesse composto: calcolo del tasso

Dalla (32) possiamo ricavare il tasso con la relazione:

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{38}$$

PROBLEMA: calcolare il tasso annuo di interesse in capitalizzazione composta che, a partire da un capitale di 80 in 9 anni, ha prodotto un montante di 120.

SOLUZIONE: $i = 4,60..\%$

Grafico della funzione montante

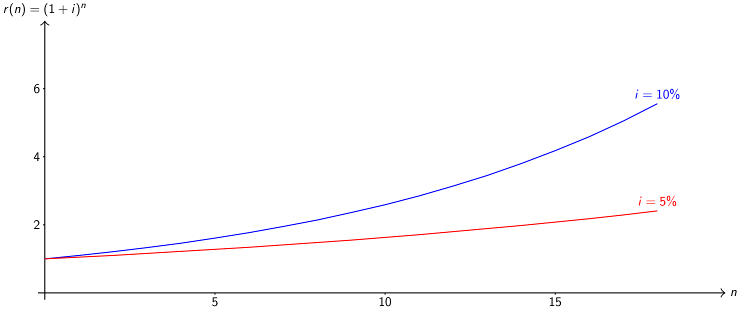


Grafico della funzione valore attuale

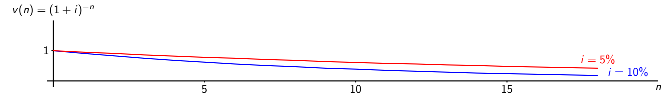
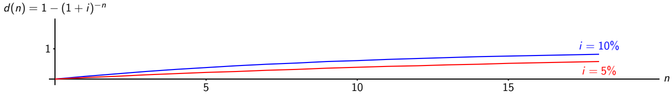


Grafico della funzione sconto



Tassi equivalenti

Problema: abbiamo la possibilità di investire lo stesso importo:

1. per tre mesi al tasso dell'$1,85\%$;
2. per tre mesi e 10 giorni al tasso del $2,03\%$.

Quale tra le due operazioni è finanziariamente più conveniente?

Osservazione: apparentemente la seconda of è più conveniente ma i due tassi di interesse non possono confrontarsi perché riferiti a of che hanno durata diversa.

Suggerimento: occorre una relazione che, a partire da un tasso relativo ad un certo periodo, calcola il *tasso equivalente* a quello originale, riferito cioè ad una base temporale diversa.

È bene tenere presente che la relazione che troveremo, dipende dal regime finanziario che regola l'of.

Tassi equivalenti

Consideriamo una of di durata unitaria, per esempio un anno $^{(*)}$; suddividiamola in k sottoperiodi tutti di uguale ampiezza $(k \in \mathbb{N}^+; 1 < k \leq 360)^{(**)}$. Siano:

- i il tasso di interesse annuale (nel nostro esempio);
- $i_{\frac{1}{k}}$ il tasso di interesse relativo ad un periodo di durata $1/k^{(***)}$.

DEFINIZIONE due tassi i, $i_{\frac{1}{k}}$, si dicono equivalenti quando i rispettivi montanti, calcolati per lo stesso capitale iniziale e per la stessa durata sono uguali.

$(*)$il periodo in questione può essere un giorno, una settimana, un mese, un bimestre, etc.; in corrispondenza il tasso sarà giornaliero, settimanale, mensile, bimestrale, etc.
$(**)$ la Matematica Finanziaria considera l'anno di 360 giorni (anno commerciale);
$(***)$struttura piatta dei tassi di interesse.

Tassi equivalenti

Il montante del capitale C nel caso di of di durata unitaria e coincidente con il periodo cui si riferisce il tasso di interesse, al tasso di interesse i tasso per periodo unitario, nel RIC, ha come montante:

$$M = C \cdot (1 + i)$$

Il montante sullo stesso capitale iniziale, investito per k periodi, al tasso $i_{\frac{1}{k}}$, nel RIC, sarà:

$$M = C \cdot (1 + i_{\frac{1}{k}})^k \tag{39}$$

Tassi equivalenti

Basandoci sulla definizione data a pagina 47 dovrà essere:

$$C \cdot (1 + i) = C \cdot \left(1 + i_{\frac{1}{k}}\right)^k$$

dividendo per C otteniamo:

$$1 + i = \left(1 + i_{\frac{1}{k}}\right)^k \tag{40}$$

da cui le relazioni:

$$i = \left(1 + i_{\frac{1}{k}}\right)^k - 1 \tag{41}$$

$$i_{\frac{1}{k}} = (1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1 \tag{42}$$

Tassi equivalenti: osservazione

Le relazioni (41) e (42), possono unificarsi nella seguente:

$$i_p = (1 + i_q)^{\frac{p}{q}} - 1 \tag{43}$$

con i_p, i_q tassi equivalenti e p/q frazione con numeratore che esprime la proporzione della base temporale di arrivo (p) rispetto alla base temporale di partenza (q).
Ritornando al problema di pagina 46, calcoliamo il tasso a tre mesi e 10 giorni equivalente al tasso a tre mesi. Poiché 3 mesi e 10 giorni sono i dieci noni di 3 mesi, sarà:

$$i_{3m10g} = (1 + i_{3m})^{\frac{10}{9}} - 1 = (1 + 0,0185)^{\frac{10}{9}} - 1 = 2,05$$

che ci porta a preferire la prima of perché il tasso a 3 mesi dell'1,85%, equivale al tasso del 2,05% a 3 mesi e 10 giorni.

Tassi equivalenti: osservazione

Calcoliamo il tasso a 3m equivalente al tasso a 3m e 10g:

$$i_{3m} = (1 + i_{3m10g})^{\frac{9}{10}} - 1 = (1 + 0,0203)^{\frac{9}{10}} - 1 = 1,82\%$$

infatti 3m sono i nove decimi di 3m e 10g.

Calcoliamo il tasso annuale equivalente al tasso 3m10g:

$$i_{annuale} = (1 + 0,0203)^{\frac{36}{10}} - 1 = 7,50\%$$

infatti un anno è 36/10 di 3m e 10g.

Tassi equivalenti: osservazione

Calcoliamo il tasso annuale equivalente al tasso 3m:

$$i_{annuale} = (1 + 0,0185)^{\frac{36}{9}} - 1 = 7,6\%$$

In generale potremo calcolare un tasso equivalente, a partire da un altro tasso, qualunque sia il periodo del tasso di partenza qualunque sia il periodo del tasso di arrivo.

Tassi equivalenti (segue)

Considerando che per la (42) era:

$$i_{\frac{1}{k}} = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

e tenendo presente, in base alla (26), che:

$$d_{\frac{1}{k}} = \frac{i_{\frac{1}{k}}}{1 + i_{\frac{1}{k}}}$$

possiamo ricavare la relazione sui tassi di sconto equivalenti:

$$d_{\frac{1}{k}} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}{1 + (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{k}}} = 1 - \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{k}}} \qquad (44)$$

Tassi equivalenti (segue)

Dalla (44), ricordando dalla (25) che $i = d/(1-d)$ otteniamo:

$$d_{\frac{1}{k}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{k}}} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{1-d}\right)^{\frac{1}{k}}} = 1 - (1-d)^{\frac{1}{k}} \quad (45)$$

da cui si può calcolare il tasso di sconto per periodo untario in funzione del tasso di sconto frazionato:

$$d = 1 - \left(1 - d_{\frac{1}{k}}\right)^{k} \quad (46)$$

Montanti e tassi equivalenti

Se la durata dell'of è una frazione del periodo cui si riferisce il tasso di interesse come nel seguente problema:

calcolare il montante di 123 unità di capitale al tasso annuo del 5% impiegato per una durata di 4 anni e tre mesi

definito con n l'eventuale numero intero di periodi, con p e k rispettivamente numeratore e denominatore di questa frazione (1/4 nel nostro esempio), si hanno due soluzioni alternative:

$$M = C(1+i)^{n+\frac{p}{k}} \tag{47}$$

$$M = C \cdot \left(1 + i_{\frac{1}{k}}\right)^{n \cdot k + p} \tag{48}$$

in cui $i_{\frac{1}{k}}$ è equivalente al tasso per periodo unitario i.

Montanti e tassi equivalenti

Infatti dalla (48) possiamo dire che:

$$M = C \cdot \left[\left(1 + i_{\frac{1}{k}} \right)^k \right]^{n + \frac{p}{k}}$$

Ricordiamo (40), che la quantità tra parentesi quadre è pari a $1 + i$ da cui:

$$M = C(1 + i)^{n + \frac{p}{k}}$$

La (47) comporta il calcolo della frazione cui elevare il tasso per periodo unitario mentre la (48) comporta il calcolo del tasso equivalente.

Montanti e tassi equivalenti

Ritornando al problema iniziale, possiamo ora riassumere le quantità che ci interessano:

- k=4, numero di trimestri in un anno;
- $i_{\frac{1}{k}} = 1,22..\%$ tasso trimestrale equivalente al tasso annuale;
- $n = 4$ numero di anni interi;
- $p/k = 1/4$.

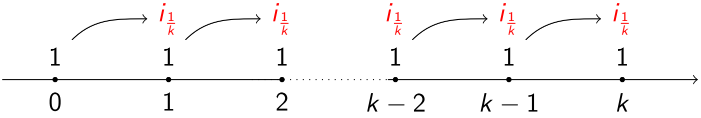
Il montante è pari a $151,3421$.

Tasso nominale di interesse

Nei mercati finanziari si utilizza spesso il **tasso nominale** $j(k)$ convertibile k volte nel periodo definito dalla relazione:

$$j(k) = k \cdot i_{\frac{1}{k}} \tag{49}$$

Il tasso d'interesse nominale, si ottiene sommando k volte l'interesse ottenuto impiegando un capitale unitario, per un *k-esimo* di periodo al tasso $i_{\frac{1}{k}}$, equivalente al tasso effettivo i relativo alla durata dell'of.



Tasso nominale di interesse

Nel tasso nominale, l'interesse maturato alla fine di ciascun sottoperiodo NON viene aggiunto al capitale iniziale, ma viene corrisposto immediatamente.
Questo è scorretto finanziariamente poichè gli interessi via via corrisposti, dovrebbero essere valutati finanziariamente alla scadenza e non sommati tra loro come nella relazione (49)

PROBLEMA dato il tasso effettivo bimestrale di interesse del 2%, calcolare il tasso nominale quadrimestrale convertibile bimestralmente e il tasso effettivo quadrimestrale equivalente al tasso effettivo bimestrale.

RISULTATO $j(2) = 4\%; i^* = 4,04\%.$

(*) usiamo il simbolo i poichè si tratta di un tasso per periodo unitario

Tasso nominale di interesse

Abbiamo visto (41), che il tasso effettivo per periodo unitario equivalente al tasso frazionato era:

$$i = (1 + i_{\frac{1}{k}})^k$$

Questa relazione, ricordando la (49), diventa:

$$i = \left(1 + \frac{j(k)}{k}\right)^k - 1 \qquad (50)$$

PROBLEMA: impieghiamo una unità di capitale ad interesse composto bimestrale al tasso annuo del 9% convertibile bimestralmente.
Calcolare: il tasso bimestrale $i_{\frac{1}{6}}$ e il tasso annuo i.
RISULTATO: $i_{\frac{1}{6}} = 1,5\%, i = 9,34\%$

Tasso nominale di interesse

Dalla (49) e dalla (42) abbiamo:

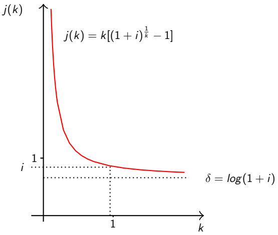
$$j(k) = k \cdot [(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1] \tag{51}$$

PROBLEMA: cosa accade se facciamo tendere la frequenza k ad ∞?

SOLUZIONE: bisogna studiare la funzione $j(k)$

Grafico della funzione $j(k)$

Senza entrare nel merito dello studio della funzione ne riproduciamo il grafico (per $k > 0$).



L'asintoto orizzontale si ottiene dalla (51) dividendo per $\frac{1}{k}$:

$$\lim_{k \to \infty} j(k) = \lim_{\frac{1}{k} \to 0} \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = log_e(1+i)^{(*)}$$

(*)in quanto la relazione precedente è un limite notevole

Forza di interesse

Posto:

$$\delta = log_e(1+i) \tag{52}$$

chiameremo δ **intensità istantanea di interesse** o **forza di interesse**

La denominazione "istantanea"si deve al fatto che è ottenuta da una frequenza di capitalizzazione $k \to \infty$.

La forza di interesse è quindi pari al tasso di interesse nominale convertibile istante per istante.

PROBLEMA: dato un tasso effettivo di interesse quadrimestrale del 2,7%, calcolare la forza di interesse corrispondente.

RISULTATO: $\delta = 2,66\%^{(*)}$ (su base quadrimestrale).

(*) in Excel il log_e si calcola con la funzione ln

Tasso nominale di sconto

Anche nelle operazioni di sconto si utilizza il **tasso nominale di sconto convertibile** k **volte**.
In questo caso avremo:

$$\rho(k) = k \cdot d_{\frac{1}{k}} \tag{53}$$

che, in base alla (45), ricava il tasso di sconto nominale in funzione del tasso di sconto per periodo unitario:

$$\rho(k) = k \cdot [1 - (1 - d)^{\frac{1}{k}}] \tag{54}$$

Forza di sconto

Anche qui calcoliamo:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(k) = \lim_{\frac{1}{k}\to 0} \frac{1-(1-d)^{\frac{1}{k}}}{\frac{1}{k}} = -log_e(1-d)$$

Poniamo:

$$\rho = -log_e(1-d) \tag{55}$$

definito come **intensità istantanea di sconto** o **forza di sconto**.
La forza di sconto è uguale al tasso di sconto nominale convertibile istante per istante.

Forza di interesse e di sconto

Consideriamo ora la relazione (55); ricordando che:

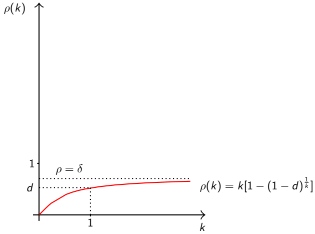
$$d = \frac{i}{1+i}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \rho = -log_e\left(1 - \frac{i}{1+i}\right) = -log_e\left(\frac{1}{1+i}\right) = \\ = -log_e(1) + log_e(1+i) = \delta \end{aligned} \tag{56}$$

OSSERVAZIONE: la forza di interesse δ concide con la forza di sconto ρ poiché se l'of ha la durata di un istante di tempo, non ha senso alcuna distinzione.

Grafico della funzione $\rho(k)$



Montante unitario in capitalizzazione continua

Il montante in capitalizzazione continua si calcola a partire dalla (52); ricordando il significato di logaritmo si può scrivere:

$$e^{\delta} = (1 + i) \tag{57}$$

Ricordando che l'espressione a destra dell'uguale è il fattore di capitalizzazione, possiamo ricavare le seguenti relazioni:

$$r(n) = e^{\delta n} \tag{58}$$

$$v(n) = \frac{1}{r(n)} = e^{-\delta n} \tag{59}$$

$$i(n) = r(n) - 1 = e^{\delta n} - 1 \tag{60}$$

$$d(n) = 1 - v(n) = 1 - e^{-\delta n} \tag{61}$$

Montante in capitalizzazione continua

PROBLEMA: Un capitale di 100 unità, viene impiegato in base ad una forza di interesse annuale del 12% per un trimestre. Calcolare il montante alla scadenza dell'of $^{(*)}$.

SOLUZIONE: Poichè in questo caso $n = \frac{1}{4}$, si ha $M = 103,04$..

(*) la funzione exp() in Excel calcola il numero e

L'interesse semplice: leggi finanziarie

Nel regime dell'interesse semplice (RIS), l'interesse è direttamente proporzionale alla durata dell'of.
Le leggi del montante, del valore attuale, dell'interesse e dello sconto saranno rispettivamente:

$$r(n) = 1 + i \cdot n \tag{62}$$

$$i(n) = i \cdot n \tag{63}$$

$$v(n) = \frac{1}{1 + i \cdot n} \tag{64}$$

$$d(n) = \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot n} \tag{65}$$

L'interesse semplice

Dalle precedenti relazioni abbiamo:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n) \tag{66}$$

$$I = C \cdot i \cdot n \tag{67}$$

$$C = \frac{M}{1 + i \cdot n} \tag{68}$$

$$D = \frac{M \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n} \tag{69}$$

L'interesse semplice: tasso frazionato

Posto che il tasso equivalente ad un dato tasso per periodo unitario e il tasso unitario devono produrre lo stesso montante, se k è il numero di sottoperiodi del periodo unitario, sarà:

$$1 + i \cdot n = 1 + i_{\frac{1}{k}} \cdot n \cdot k$$

da cui:

$$i_{\frac{1}{k}} = \frac{i}{k} \tag{70}$$

PROBLEMA: dato un tasso di interesse effettivo trimestrale del $3,3\%$, calcolare l'equivalente tasso effettivo mensile.

SOLUZIONE per la relazione (70) avremo:

$$i_{\frac{1}{3}} = \frac{i}{k} = \frac{3,3\%}{3} = 1,1\%$$

L'interesse semplice

Analogamente a quanto visto nel caso del RIC a pagina 55, se la durata dell'of non coincide con il periodo cui si riferisce il tasso, dovendo calcolare M, C, I, D o i corrispettivi per capitali unitari, possiamo procedere o calcolando il tasso equivalente$^{SOL.1}$ o calcolando la frazione del periodo cui si riferisce il tasso$^{SOL.2}$, salve restando le differenze dovute al regime finanziario.

PROBLEMA: un capitale di 120 unità, viene impiegato al tasso annuale $i = 4\%$ per 2 anni, 3 mesi e 15 giorni. Calcolare il montante in capitalizzazione semplice.

SOLUZIONE

1. tasso quindicinale equivalente al tasso annuale$=0,04/24 = 0,001667$; $M = 120 * (1 + 0,00167 * 55^{(*)}) = 131$;
2. $n = 2,291667^{(**)}$; $M = 120 * (1 + 0,04 * 2,291667) = 131$

(*) 55=unità da 15 giorni per una durata di 2 anni, 3 mesi, 15gg;
(**) $2,291667 = 2 + 3/12 + 15/360$.

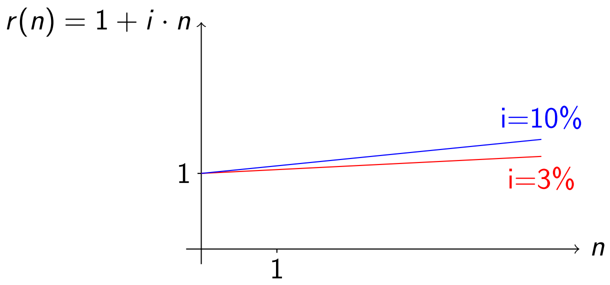
L'interesse semplice: tasso nominale

Tenendo presente la (70) possiamo scrivere:

$$j(k) = k \cdot i_{\frac{1}{k}} = i \tag{71}$$

OSSERVAZIONE nel RIS il tasso nominale di interesse coincide con il tasso effettivo per periodo unitario in quanto gli interessi vengono corrisposti ad ogni k-esimo di periodo.
Nel RIC, si veda la formula (51) e il problema di pagina 59, i due tassi sono difformi a causa del reimpiego degli interessi.

L'interesse semplice: grafico



Nella legge/funzione del montante (RIS), il tasso di interesse i è il coefficente angolare della retta (si veda nella figura la relazione in cima all'asse delle y).

La scindibilità

Consideriamo un regime finanziario qualsiasi.
Ricordiamo che il montante all'epoca y di una unità monetaria impiegata all'epoca x in quel regime finanziario è:

$$r(x, y)$$

.

Nei regimi finanziari che abbiamo illustrato avevamo:

$$\begin{array}{ll} r(x,y) = (1+i)^{y-x} & \text{capitalizz. composta} \\ r(x,y) = 1 + i \cdot (y-x) & \text{capitalizz. semplice} \end{array}$$

La scindibilità (segue)

Consideriamo ora le seguenti of:

- investiamo una unità di capitale all'epoca x; il montante all'epoca y sarà:

  $$r(x, y)$$

  disinvestiamo e reinvestiamo, allo stesso regime, fino all'epoca z ($z > y$). Il montante complessivo sarà:

  $$r(x, y) \cdot r(y, z)$$

- investiamo una unità di capitale all'epoca x, allo stesso regime finanziario, ininterrottamente, fino all'apoca z. Il montante complessivo sarà:

  $$r(x, z)$$

La scindibilità: definizione

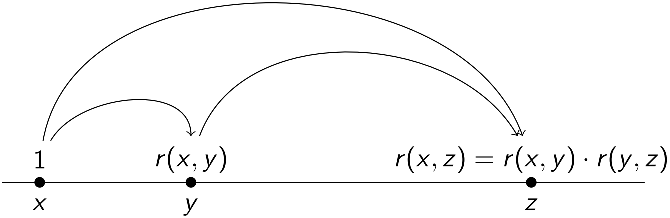
Un regime finanziario si dice scindibile
se il montante prodotto per una certa durata
eguaglia quello ottenuto dal frazionamento della durata
in tempi ordinati, adiacenti tra loro, in numero qualsiasi,
con of di disinvestimento e reinvestimento immediato
allo stesso tasso di interesse

In formule:

$$r(x,z) = r(x,y) \cdot r(y,z) \qquad \text{con} \quad x < y < z \tag{72}$$

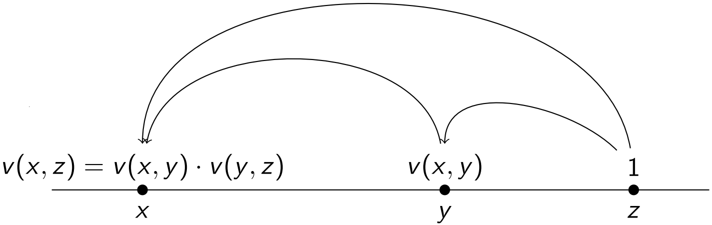
La scindibilità sullo scadenzario

Nella figura sottostante viene rappresentata la legge del montante per un regime finanziario scinibile.



La scindibilità sullo scadenzario

Nella figura sottostante viene rappresentata la legge del valore attuale per un regime finanziario scinibile.



La scindibilità

Nel RIS i montanti per capitali unitari alle tre scadenze saranno:

$$r(x,y)=1+i(y-x); \quad r(y,z)=1+i(z-y); \quad r(x,z)=1+i(z-x)$$

Moltiplicando membro a membro i primi due due ottengo:

$$\begin{aligned} r(x,y)\cdot r(y,z) &= 1+i(z-y)+i(y-x)+i^2(y-x)(z-y) \\ &= 1+i(z-x)+i^2(y-x)(z-y) \\ &= r(x,z)+i^2(y-x)(z-y) \end{aligned}$$

Poiché $i^2(y-x)\cdot(z-y)>0$ sarà:

$$r(x,y)\cdot r(y,z)\neq r(x,z)$$

pertanto **il RIS non è scindibile**.

La scindibilità

Nel RIC i montanti per capitali unitari alle tre scadenze saranno:

$$r(x,y) = (1+i)^{y-x}; \quad r(y,z) = (1+i)^{z-y}; \quad r(x,z) = (1+i)^{z-x}$$

da cui moltiplicando membro a membro le prime due ottengo:

$$\begin{aligned} r(x,y) \cdot r(y,z) &= (1+i)^{y-x} \cdot (1+i)^{z-y} \\ &= (1+i)^{(y-x)+(z-y)} \\ &= (1+i)^{z-x} \end{aligned}$$

Sarà quindi:

$$r(x,y) \cdot r(y,z) = r(x,z)$$

pertanto **il RIC è scindibile**.

La scindibilità

Nel caso di leggi uniformi, ovvero dipendenti dalla sola durata, posto:

$$j = y - x; \qquad k = z - y; \qquad n = z - x = j + k$$

la relazione di scindibilità per la legge del montante diventa:

$$r(n) = r(j + k) = r(j) \cdot r(k)$$

mentre per la legge del valore attuale sarà:

$$v(n) = v(j + k) = v(j) \cdot v(k)$$

La scindibilità: esercizio

PROBLEMA: date 1000 unità di capitale al tasso semestrale del 2%, calcolare il montante nel RIS e nel RIC:

- per una durata ininterrotta di 3 semestri (M_{3sem});
- per due intervalli successivi, il primo di due semestri (M_{2sem}), il secondo di uno.

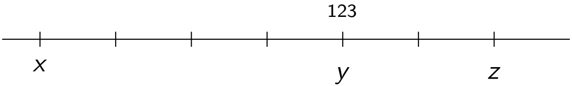
MONTANTE NEL RIS
$M_{3sem} = 1000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 3) = 1060$
$M_{2sem} = 1040; \quad M_{(2+1)sem} = 1040 \cdot (1 + 0,02) = 1060,8$

MONTANTE NEL RIC
$M_{3sem} = 1000 \cdot (1 + 0,02)^3 = 1061,2$
$M_{2sem} = 1040,4; \quad M_{(2+1)sem} = 1040,4 \cdot (1 + 0,02) = 1061,2$

La scindibilità: esercizio

PROBLEMA: nel RIC, un capitale M di 123 disponibile fra 4 mesi (epoca y), viene anticipato all'epoca x, al tasso di interesse mensile dell'1,5%.

1. calcolare il valore attuale C all'epoca x di M; calcolare il montante di C all'epoca $z = x + 6 mesi$.
2. tenendo presente il concetto di scindibilità, calcolare *direttamente* il montante di 123 in z.



SOLUZIONE

1. $C = 123 \cdot (1+i)^{-4} = 115,887$; $M = 115,887 \cdot r^6 = 126,7177$;
2. $M = 123 \cdot (1+i)^{-4} \cdot (1+i)^6 = 123 \cdot (1+i)^2 = 126,7177$.

L'operazione finanziaria complessa

Le of elementari viste finora erano del tipo:

$$F = \{(I_1, t_1), (I_2, t_2)\}$$

Ci occuperemo ora di of complesse che abbiamo sintetizzato con la notazione:

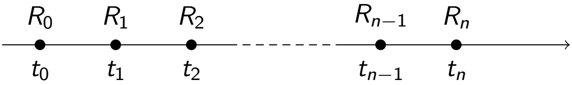
$$F = \{(I_1, t_1), (I_2, t_2), \ldots, (I_n, t_n)\}$$

Abbiamo già visto a pagina 8, un esempio di of di questo tipo. Mentre rimarranno valide le relazioni finanziarie viste finora, vogliamo determinare un unico valore, equivalente finanziario di un insieme di importi. Il calcolo di tale valore ipotizzerà:

- regime finanziario scindibile (RIC);
- leggi finanziarie uniformi (dipendenti dalla durata cfr.36);
- tassi a struttura piatta e riferiti al periodo unitario.

La rendita: definizioni

Si consideri una of descritta dal seguente scadenzario:



nel quale contiamo $n+1$ importi R_k associati ad altrettante t_k scadenze $(k = 0, \dots, n)$.

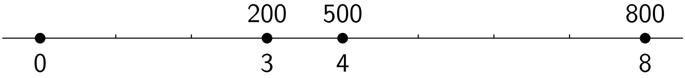
Definiamo con:

- **rendita** la successione di importi R_k;
- **rata** della rendita il singolo importo R_k;
- **valore capitale** della rendita all'epoca T, la somma delle rate riferite *finanziariamente* all'epoca T (con T qualsiasi).

Le rendite: calcolo del valore capitale

PROBLEMA: una rendita si compone delle seguenti rate: 200 fra tre anni, 500 fra 4 anni, 800 fra 8 anni. Il tasso di interesse è del 6% annuo. Calcolare il valore capitale:

1. all'epoca 0;
2. all'epoca 9 (l'epoca non è visibile sullo scadenzario);
3. all'epoca 5.



Le rendite: calcolo del valore capitale

SOLUZIONE:

Il valore capitale:

1. in 0 è di: $1065,901 =$
   $200 \cdot (1+0,06)^{-3} + 500 \cdot (1+0,06)^{-4} + 800 \cdot (1+0,06)^{-8}$;
2. in 9 è di: $1800,817 =$
   $200 \cdot (1+0,06)^{6} + 500 \cdot (1+0,06)^{5} + 800 \cdot (1+0,06)^{1}$;
3. in 5 è di $1426,415 =$
   $200 \cdot (1+0,06)^{2} + 500 \cdot (1+0,06)^{1} + 800 \cdot (1+0,06)^{-3}$;

NOTA: calcolato il primo risultato, per la scindibilità del regime finanziario, i risultati 2 e 3 potevano essere calcolati in modo più semplice capitalizzando il primo risultato rispettivamente per 9 e per 5 periodi (si veda pagina 85).

La rendita: definizioni

Una rendita può classificarsi in relazione a vari fattori.

- scadenza delle rate

periodica	**non periodica**
$t_k - t_{k-1} = u$ costante	u variabile (cfr. 93)

- periodo unitario

frazionata periodo unitario (es. 1 anno), 2 rate semestr.	**intera** periodo un anno, una rata annuale

- importo della rata

costante	**variabile**
rate dello stesso importo	rate di importo diverso

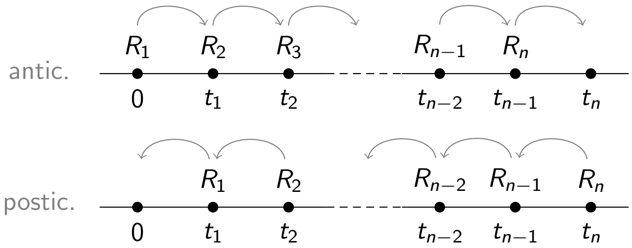
La rendita: definizioni

- numero delle rate

temporanea	perpetua
n finito	$n \to \infty$ (numerabile)

- scadenza della rata rispetto al periodo di riferimento

anticipata	posticipata
all'inizio del periodo corrispondente	alla fine del periodo corrispondente



La rendita: definizioni

- epoca di valutazione della rendita

immediata
la valutazione coincide con il pagamento della prima rata

differita
la valutazione avviene ad un'epoca antecedente rispetto al pagamento della prima rata

Le rendite

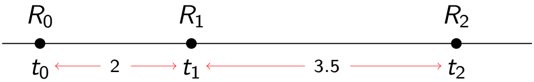
Se i periodi sono difformi tra loro, si possono comunque equintervallare. Bisognerà:

1. calcolare il Massimo Comun Divisore (MCD) della distanza di tempo tra tutte le rate;
2. definire uno scadenzario di periodo costante $u = MCD$, aggiungendo rate di importo uguale a 0 laddove necessario.

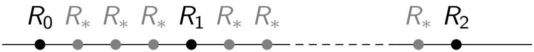
Vediamo ora un esempio in cui si applica questa soluzione.

Le rendite

PROBLEMA: dato il seguente scadenzario, calcolare il MCD e ridefinirlo in modo da avere rate a periodicità costante.



$MCD = 0.5$. Il nuovo scadenzario sarà:



con: $t_k - t_{k-1} = 0.5; \quad R_0, R_1, R_2 \neq 0; \quad R_* = 0.$

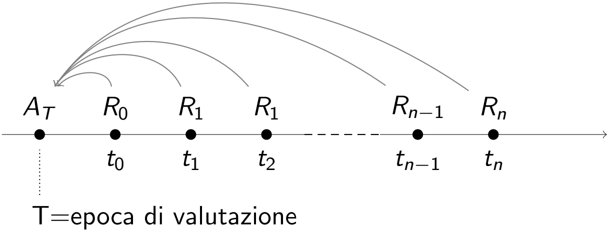
D'ora in avanti le rendite saranno sempre periodiche.

Valore capitale di una rendita

Se $T \leq t_0$, il valore capitale della rendita A_T, in si calcola con la relazione:

$$A_T = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{-(t_k - T)} \qquad (T \leq t_0) \qquad (73)$$

Le rate vengono **attualizzate** all'epoca T e sommate tra loro.

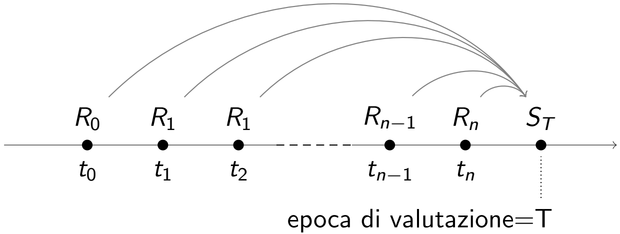


Valore capitale di una rendita

Se $T \geq t_n$, il valore capitale della rendita S_T, si calcola con la relazione:

$$S_T = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{T-t_k} \qquad (\text{se } T \geq t_n) \tag{74}$$

Le rate vengono **capitalizzate** all'epoca T e sommate tra loro.

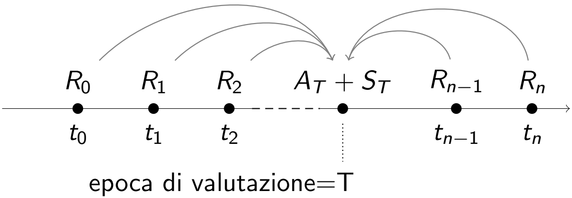


Valore capitale di una rendita

Se $t_0 < T < t_n$, il valore capitale della rendita $A_T + S_T$, si calcola con la relazione:

$$S_T + A_T = \sum_{j=0}^{k-1} R_j (1+i)^{T-t_j} + \sum_{j=k}^{n} R_j (1+i)^{-(t_j - T)} \quad (t_0 < T < t_n) \tag{75}$$

Le rate che precedono T si **capitalizzano**, le rate che seguono T si **attualizzano** e i risultati così ottenuti si sommano tra loro.



Valore attuale di una rendita costante posticipata

Vogliamo calcolare il valore capitale di una rendita in $T = t_0$ nel caso di rate costanti posticipate. Essendo $v = 1/(1+i)$ (18), ricordata la proporzionalità di C rispetto a M nella legge di attualizzazione (pagina 21), la relazione (73):

$$A_T = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{-(t_k - T)} \qquad (T \leq t_0)$$

diventa:

$$A_T = R \sum_{k=1}^{n} v^k = R \cdot (v^1 + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n) \qquad (76)$$

Valore attuale rendita unitaria posticipata

La somma dei valori attuali di una rendita unitaria, si identifica con il simbolo $a_{\overline{n|}\,i}$ che si legge *a figurato n, tasso i*. In simboli:

$$a_{\overline{n|}\,i} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} + v^n \tag{77}$$

A destra dell'uguaglianza abbiamo la somma di n termini di una progressione geometrica di ragione $v = 1/(1+i)$ che, per nota regola, ci porta a scrivere:

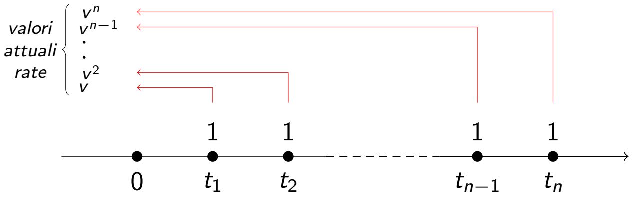
$$a_{\overline{n|}\,i} = v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1-v^n}{i} \tag{78}$$

In base alla (76) possiamo calcolare il valore attuale di una rendita temporanea con rate costanti posticipate:

$$A_T = R \cdot a_{\overline{n|}\,i} \tag{79}$$

Valore attuale rendita unitaria posticipata

Lo scadenzario che rappresenta i valori attuali (all'epoca 0), delle rate unitarie posticipate è:



Montante di una rendita costante posticipata

Vogliamo calcolare il valore montante di una rendita in $T = t_n$ nel caso di rate costanti posticipate.
Poiché $a_{\overline{n|}\, i}$ è il valore attuale di una rendita unitaria posticipata, il corrispondente montante, che indichiamo con $s_{\overline{n|}\, i}$, si ottiene capitalizzando n volte quel valore attuale. In formule:

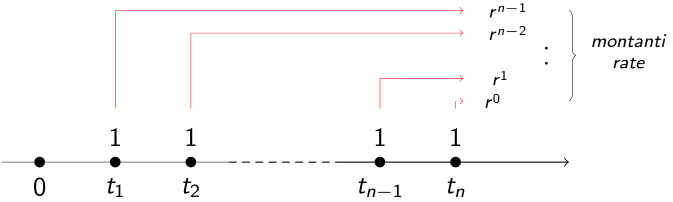
$$s_{\overline{n|}\, i} = a_{\overline{n|}\, i} \cdot (1+i)^n = \frac{1-v^n}{i} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \\ = \frac{r^n - 1}{i} \tag{80}$$

Il montante per un capitale non unitario S_T, stante la (4), si ottiene con la relazione:

$$S_T = R \cdot s_{\overline{n|}\, i} \tag{81}$$

Montante di una rendita unitaria posticipata

Sullo scadenzario sono rappresentati i montanti di una rendita unitaria posticipata.



Valore attuale rendita unitaria anticipata

Il valore attuale di una rendita unitaria anticipata, che si indica con il simbolo $\ddot{a}_{\overline{n|}\,i}$, è:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

moltiplicando a destra dell'uguaglianza per $1 = v \cdot (1 + i)$ abbiamo:

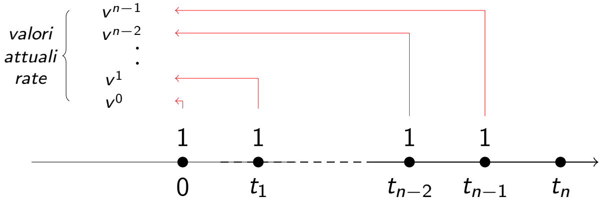
$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} =& (1+i)(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n)\\ =& (1+i) \cdot \frac{1 - v^n}{i}\end{aligned}$$

da cui moltiplicando numeratore e denominatore per $1/(1+i)$:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = \frac{1 - v^n}{\frac{i}{1+i}} \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1 - v^n}{d} \qquad (82)$$

Valore attuale rendita unitaria anticipata

Sullo scadenzario sono rappresentati i valori attuali di una rendita unitaria anticipata.



Il valore attuale di una rendita anticipata non unitaria, che indichiamo con il simbolo $\ddot{A}_T$ si calcola con:

$$\ddot{A}_T = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|\, i} \tag{83}$$

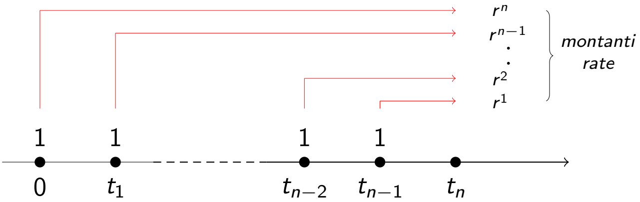
Montanti di rendite costanti anticipate

Capitalizzando la (82) per n periodi otteniamo il corrispondente montante che scriveremo come:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}\, i} = \frac{1 - v^n}{d} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d} = \frac{r^n - 1}{d} \tag{84}$$

Da questa relazione ricaviamo il montante per una rendita non unitaria con:

$$\ddot{S}_T = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}\, i} \tag{85}$$



Valori attuali e montanti di rendite unitarie costanti

Riepiloghiamo le relazioni fondamentali sulle rendite unitarie.

$$a_{\overline{n}|\, i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|\, i} = \frac{1 - v^n}{d}$$

$$s_{\overline{n}|\, i} = \frac{r^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|\, i} = \frac{r^n - 1}{d}$$

Problemi sulle rendite

I problemi sulle rendite possono ricondursi ad uno dei seguenti:

1. dati A_T/S_T, i, n, si deve calcolare la rata R;
2. dati A_T/S_T, i, R, si deve calcolare il numero di rate n;
3. dati A_T/S_T, n, R, si deve calcolare il tasso i.

Problemi sulle rendite: calcolo della rata

Nel caso di rendite posticipate, la (78), (79) e la (80), (81), stabilivano che:

$$A_T = R \cdot \frac{1 - v^n}{i}; \qquad S_T = R \cdot \frac{r^n - 1}{i}$$

Pertanto, noti gli altri elementi, possiamo calcolare la rata R con:

$$R = \frac{A_T}{a_{\overline{n|}\, i}}; \qquad R = \frac{S_T}{s_{\overline{n|}\, i}} \tag{86}$$

Problemi sulle rendite: calcolo del numero di rate

Vogliamo calcolare il numero di rate, dati A_T, i, R.
Nel caso di rendita posticipata, consideriamo la (79):

$$A_T = R \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$1 - \frac{A_T \cdot i}{R} = v^n$$

da cui, passando ai logaritmi si ha:

$$n \cdot log\left(\frac{1}{1+i}\right) = log\left(1 - \frac{A_T \cdot i}{R}\right)$$

Problemi sulle rendite
calcolo del numero di rate

$$n = \frac{log\left(1 - \frac{A_T \cdot i}{R}\right)}{log\left(\frac{1}{1+i}\right)}$$

da cui:

$$n = -\frac{log\left(1 - \frac{A_T \cdot i}{R}\right)}{log(1+i)} \tag{87}$$

Dal momento che difficilmente n risulterà intero....

NOTA per calcolare n, si tenga presente quanto osservato a pagina 42.

Problemi sulle rendite calcolo del numero di rate

Dalla (80) e dalla (81) abbiamo:

$$
\begin{aligned}
S_T &= R \cdot \frac{r^n - 1}{i} \\
1 + \frac{S_T \cdot i}{R} &= (1+i)^n \\
n &= \frac{log\left(1 + \frac{S_T \cdot i}{R}\right)}{log(1+i)}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

Problemi sulle rendite calcolo del tasso i

I problemi di ricerca del tasso di interesse in relazione ad una rendita, richiedono la conoscenza dei metodi per la soluzione di equazioni di grado n o di metodi di approssimazione. In questa sede non ce ne occuperemo.

Ammortamento di prestiti

Il *mutuo* è la denominazione giuridica, regolata nel nostro ordinamento da una norma di diritto privato, dell'of costituita dalla cessione di una somma di denaro e della sua successiva restituzione assieme ad un determinato interesse.

Quando il rimborso di interessi e del capitale avviene in modo graduale e non in una sola scadenza (*), parleremo di *ammortamento del prestito*. Vediamo di cosa si tratta.

(*)In questa sede non ci occuperemo, data la loro scarsa diffusione, di casi del genere

Ammortamento di prestiti

Il debitore paga periodicamente una rata R. Di questa una parte ricostituisce la **somma** avuta in prestito, l'altra forma gli **interessi**. In questo modo il debito si riduce progressivamente fino ad azzerarsi alla scadenza finale.

La progressiva riduzione del debito comporta che il debitore, sia interessato a conoscere, accanto a quelli già elencati, due elementi aggiuntivi: il **debito residuo**, cioè la parte del capitale da rimborsare, ed il **debito estinto**, ovvero la parte di capitale già restituita.
Queste grandezze confluiscono in un prospetto chiamato **piano di ammortamento**.

Piano di ammortamento (a rate costanti)

N.RATA	RATA	QUOTA CAPITALE	QUOTA INTERESSI	DEBITO RESIDUO	DEBITO ESTINTO
0	−−	−−	−−	1000	−−
1	282	232	50	768	232
2	282	244	38	524	476
3	282	256	26	269	731
4	282	268	14	−−	1000

(*) alcuni importi sono arrotondati. I dati del piano sono: A=1000, n=4, i=5%

Ammortamento di prestiti

I dati iniziali sono costituiti dal **capitale** A anticipato all'epoca 0, dal **numero di scadenze** ciascuna di periodo unitario (n), dal **tasso di interesse** per periodo unitario (i). Le rate vengono versate posticipatamente.
Gli elementi del piano e le relazioni fondamentali sono:

- rate $R_1, R_2, \ldots, R_n$; per il principio dell'equivalenza finanziaria sarà:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k \cdot v^k = A \tag{89}$$

  chiamata **condizione di equivalenza prospettiva in funzione delle rate**.

Ammortamento di prestiti

- quote capitale $C_1, C_2, \ldots, C_n$, che si riferiscono al capitale da rimborsare per cui vale la relazione:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = A$$

- debito residuo $D_1, D_2, \ldots, D_n$;

$$D_k = C_{k+1} + C_{k+2} + \cdots + C_n$$
$$(D_0 = A; D_n = 0)$$

- **equazione esplicita prospettiva del debito residuo in funzione delle rate**:

$$D_k = \sum_{j=k+1}^{n} R_j \cdot v^{j-k} \tag{90}$$

Ammortamento di prestiti

- debito estinto $E_1, E_2, \ldots, E_n$; in formula:

$$E_k = C_1 + C_2 + \cdots + C_k \tag{91}$$
$$(E_0 = 0; E_n = A)$$

- quota interesse $I_1, I_2, \ldots, I_n$;

$$I_k = D_{k-1} \cdot i \tag{92}$$
$$I_k = R_k - C_k$$

Ammortamento a rate costanti (ammortamento francese)

Nel novero degli ammortamenti, esistono diversi criteri che presiedono alla determinazione degli elementi del piano.
Il metodo più diffuso è quello che prevede rate ad importo costante con pagamento posticipato denominato **ammortamento francese**.
Sarà quindi:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_n$$

Per la condizione di equivalenza prospettiva in funzione delle rate e per la (78) sarà;

$$A = R \cdot a_{\overline{n}|\, i} = R \cdot \frac{1 - v^n}{i} \tag{93}$$

Ammortamento a rate costanti (ammortamento francese)

da cui si ricava la rata R con:

$$R = \frac{A \cdot i}{1 - v^n} \tag{94}$$

Il debito residuo calcolato in base alla (90), tenendo presente la (78) per la sostituzione di v^{n-k} con $a_{\overline{n-k}|\,i}$ è:

$$D_k = R \sum_{j=k+1}^{n} v^{n-k} = R \cdot a_{\overline{n-k}|\,i} = R \cdot \frac{1 - v^{n-k}}{i} \tag{95}$$

Ammortamento a rate costanti (ammortamento francese)

La quota interesse si calcola con la (92) per cui:

$$\begin{aligned} I_k =& D_{k-1} \cdot i = i \cdot R \cdot a_{\overline{n-(k-1)|}\, i} = i \cdot R \cdot a_{\overline{n-k+1|}\, i} = \\ =& R \cdot (1 - v^{n-k+1}) \end{aligned} \tag{96}$$

La quota capitale si ricava dalla relazione (92) e perciò:

$$C_k = R - I_k = R - R \cdot (1 - v^{n-k+1}) = R \cdot v^{n-k+1} \tag{97}$$

Da questa relazione otteniamo una proprietà dell'ammortamento a rate costanti: le quote capitale sono una progressione geometrica di ragione $v^{-1} = 1 + i$. Infatti:

$$\frac{C_k}{C_{k-1}} = \frac{R \cdot v^{n-k+1}}{R \cdot v^{n-k+2}} = v^{n-k+1-n+k-2} = v^{-1} = 1 + i$$

Ammortamento a rate costanti (ammortamento francese)

Per il debito estinto vale la relazione:

$$E_k = A - D_k$$

da cui:

$$E_k = R \cdot a_{\overline{n|}\, i} - R \cdot a_{\overline{n-k|}\, i} = R \cdot (\frac{1 - v^n}{i} - \frac{1 - v^{n-k}}{i})$$

da cui:

$$E_k = R \cdot (\frac{v^{n-k} - v^n}{i}) = R \cdot v^{n-k} \frac{1 - v^k}{i} \tag{98}$$

OSSERVAZIONE: abbiamo volutamente espresso tutte le relazioni in funzione di v per facilitare i calcoli.

Piano di ammortamento a rate costanti

Le precedenti relazioni sono riassunte nella generica (k-esima) riga.

N.RATA	RATA	QUOTA CAPITALE	QUOTA INTERESSI	DEBITO RESIDUO	DEBITO ESTINTO
...	...	...	...	...	...
k	$\frac{A \cdot i}{1-v^n}$	Rv^{n-k+1}	$R(1-v^{n-k+1})$	$R\frac{(1-v^{n-k})}{i}$	$Rv^{n-k}\frac{1-v^k}{i}$
...	...	...	...	...	...