ESAME MATEMATICA CORSO BASE

8.02.2022

PROF.SSA ANNA ATTIAS

1) Enunciare il Teorema della media di Cauchy e verificarlo per le seguenti funzioni nell'intervallo $[0; +1]$

   $f(x) = e^{x^2+1} \quad g(x) = x^2 + 1$

2) Studiare e rappresentare la seguente funzione

   $$y = \frac{(x-2)^2}{x-3}$$

3) Risolvere il seguente integrale

   $$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$$

4) Risolvere il seguente sistema lineare parametrico

   $$\begin{cases} 2x + ky - z = 1 \\ kx - y - z = 2 \end{cases}$$

1. Teorema di Cauchy:

   Date due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definite e continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabili nell'intervallo aperto (a, b), con $g'^{(x)} \neq 0$, si dimostra che esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che

   $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - \ g(a)} = \frac{f'^{(c)}}{g'^{(c)}}$$

   Svolgimento:

   $f(x) = e^{x^2+1} \qquad g(x) = x^2 + 1 \qquad [0, 1]$

   queste sono definite e continue su tutto $\mathbb{R}$ quindi lo sono in $[0, 1]$

   $f'(x) = 2xe^{x^2+1} \quad g'(x) = 2x$

   che esistono su tutto $\mathbb{R}$ quindi anche in $(0,1)$

   $g'^{(x)} \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 0 \quad x \neq 0.$

   Calcoliamo $f(x)$ e $g(x)$ agli estremi dell'intervallo

   $f(0) = e \quad g(x) = 1 \quad f(1) = e^2 \quad g(1) = 2$

   $\frac{e^2 - e}{2 - 1} = \frac{2ce^{c^2+1}}{2c}$

   $e^2 - e = e^{c^2+1} \ ; \ \ e(e - 1) = e^{c^2+1}$

   $\log\big(e(e - 1)\big) = e^{c^2+1}$

   $\log e + \log(e - 1) = c^2 + 1$

   $1 + \log(e - 1) = c^2 + 1$

   $c^2 = \log(e - 1) \qquad c = \pm\sqrt{\log(e - 1)}$

   $c_1 = \sqrt{\log(e - 1)} \quad c_1 \cong 0{,}736 \; accettabile$

   $c_2 = \sqrt{\log(e - 1)} \quad c_2 \cong 0{,}736 \; non \; accettabile$

2. $y = \frac{(x-2)^2}{x-3}$

   2.1. Definizione: funzione algebrica razionale fratta di 2° grado

   2.2. Dominio: $x - 3 \neq 0; \quad x \neq 3$

   $\exists y \forall x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

   $x = 3$ punto singolare

2.3. Intersezione con gli assi:

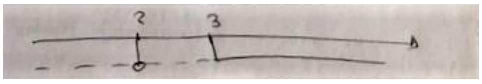
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \quad A\left(0; -\frac{4}{3}\right) \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad B(2;\ 0)$$

2.4. Studio del segno:

$$\frac{(x-2)^2}{x-3} \geq 0$$

$N: (x-2)^2 \geq 0 \qquad \forall x \in D$

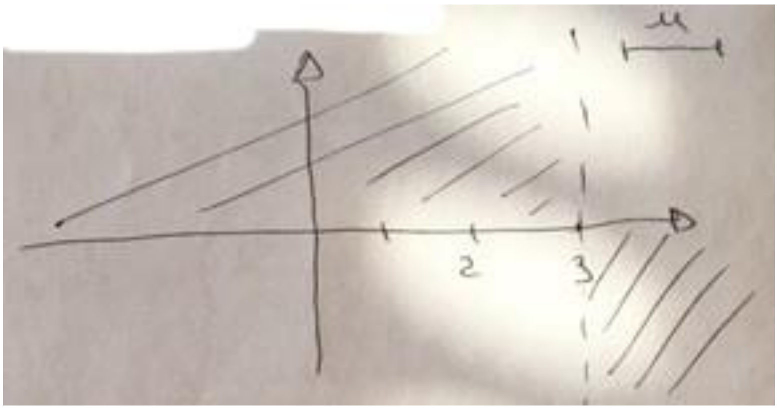
$D: x - 3 > 0; \qquad x > 3$



$f(x) < 0 \forall x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3)$

$f(x) > 0 \forall x \in (3; +\infty)$

2.5. Grafico a zone:



2.6. Studio singolarità:

$\lim_{x\to 3} \frac{(x-2)^2}{x-3} = \infty$ studiando l’intorno circolare bucato di 3

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-2)^2}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-2)^2}{x-3} = -\infty$$

$x = 3$ punto di infinito

2.7. Asintoti verticali:

$x = 3$

2.8. Comportamento all’infinito:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{(x-2)^2}{x-3} = \pm\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali

2.9. Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-2)^2}{x-3} \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x-3} - x \right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 3x}{x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x+4}{x-3} = -1$$

$y = x - 1$

x	y
0	-1
1	0

L'asintoto obliquo non ha intersezioni con la funzione.

2.10. Derivata prima:

$$y' = \frac{2(x-2)(x-3) - (x-2)^2}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(2x-6-x+2)}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

2.11. Teorema di Fermat del 1° ordine

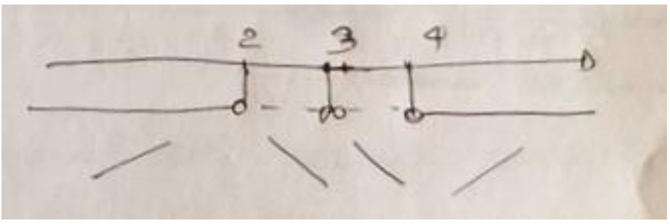
$(x-2)(x-4) = 0$ $\quad x = 2, \quad x = 4$ punti stazionari potenziali massimi e/o minimi

2.12. Crescenza e decrescenza:

$$\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2} \geq 0$$

$N: (x-2)(x-4) \geq 0 \quad x \leq 2 \;\; x \geq 4$

$D: (x-3)^2 > 0 \quad \forall x \in D$



$f(x)$ è *crescente* $\forall x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

$f(x)$ è *decrescente* $\forall x \in (2; 3) \cup (3; 4)$

$x = 2$ punto di massimo

$f(2) = 0 \qquad M(2; 0)$

$x = 4$ punto di minimo

$f(4) = 4 \qquad m(4; 4)$

2.13. Derivata seconda:

$$y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

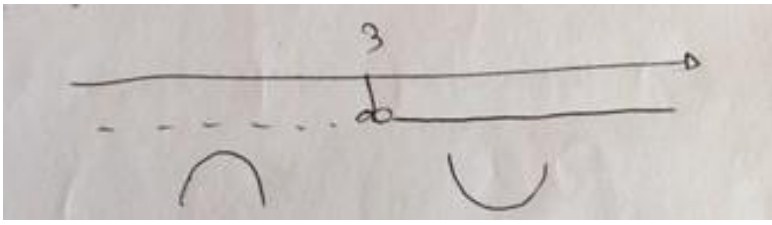
$y'' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x^2-6x+8)(x-3)}{(x-3)^4} =$ semplificando

$$\frac{(2x-6)(x-3)-2(x^2-6x+8)}{(x-3)^3}=\frac{2}{(x-3)^3}$$

2.14. Fermat del secondo ordine: la deriata seconda non si annulla quindi non ci sono punti di flesso.

2.15. Concavità e convessità:

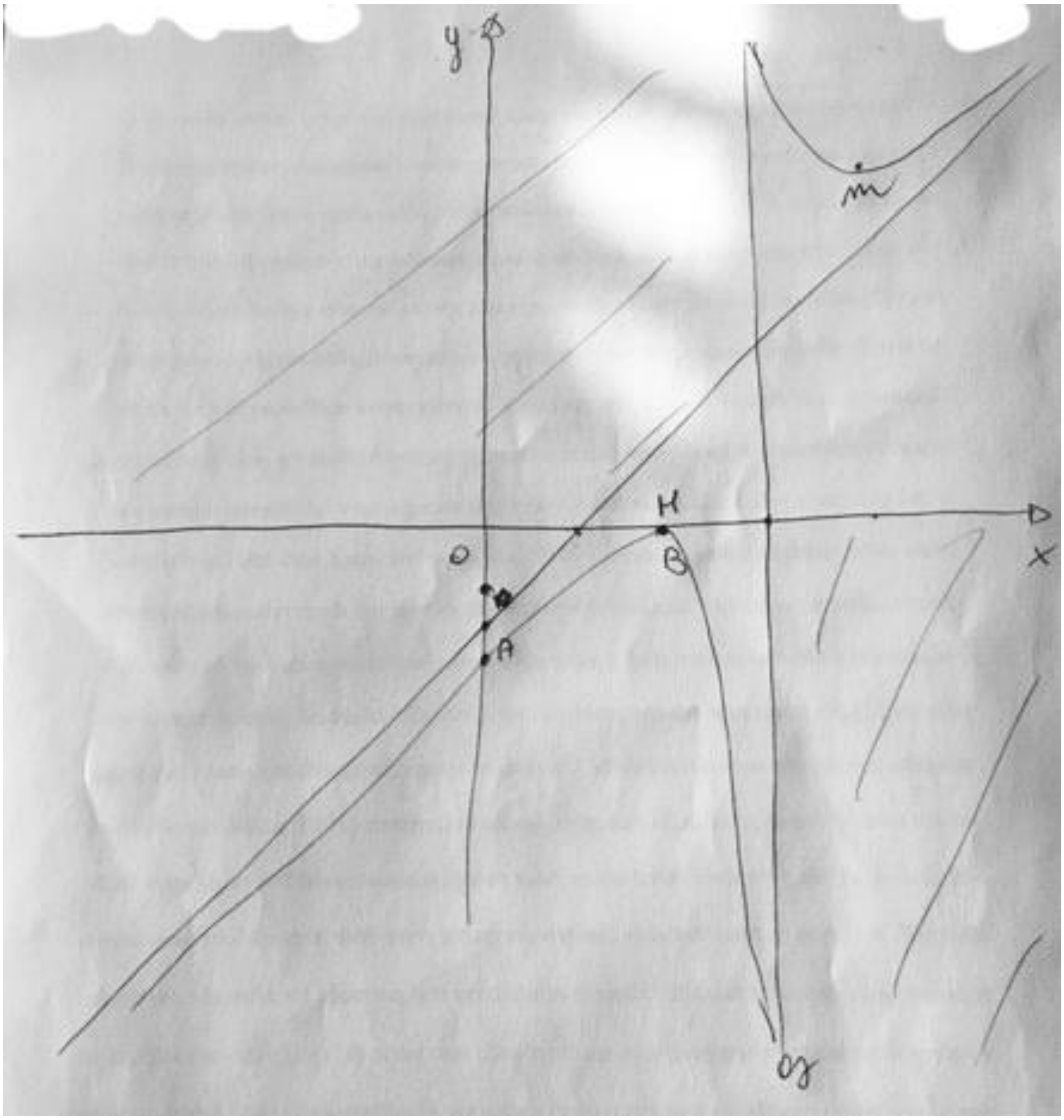
$\frac{2}{(x-3)^3}>0; \quad x-3>0 \quad x>3$



$f(x)$ è $concava$ $\forall x \in (-\infty; 3)$

$f(x)$ è $convessa$ $\forall x \in (3; +\infty)$

2.16. Grafico funzione:



3)

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx =$$

Il numeratore è la derivata del denominatore quindi è un integrale immediato del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = log|f(x)| + C \;\Rightarrow\; [log|x^2+3x+1|]_1^2 = log11 - log5 = log\frac{11}{5}$$

4)

$$\begin{cases} 2x + ky - z = 1 \\ kx - y - z = 2 \end{cases}$$ Sistema lineare parametrico di 2 equazioni in 3 incognite

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ k & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A/\bar{b}_{2x4} = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 & 1 \\ k & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\max r(A) = 2 \qquad \max r(A/\bar{b}) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ k & -1 \end{vmatrix} = -2 + k \qquad k - 2 \neq 0 \quad k \neq 2$$

$$r(a) = r(A/\bar{b}) = 2 \qquad \infty^1\ soluzioni$$

Il sistema è compatibile per il Teorema di Rouchè Capelli

$$\begin{cases} y = \propto \\ 2x - z = 1 - k \propto \\ kx - z = 2 - k \propto \end{cases}$$ si applica la regola di Cramer per determinare le soluzioni

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 - k \propto & -1 \\ 2 - k \propto & -1 \end{vmatrix}}{k-2} = \frac{1 - \cancel{k \propto} + 2 - \cancel{k \propto}}{k-2} = \frac{1}{k-2}$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 - k \propto \\ k & 2 - k \propto \end{vmatrix}}{k-2} = \frac{4 - 2k \propto - k + k^2 \propto}{k-2}$$

$$P\left(\frac{1}{k-2};\ \propto;\ \frac{k^2 \propto - (2 \propto + 1)k + 4}{k-2}\right)$$

Per $k = 2$

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ k & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A/\bar{b}_{2x4} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\max r(A) = 2 \qquad \max r(A/\bar{b}) = 2$$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0 \ \Rightarrow per\ il\ Teorema\ di\ Rouchè\ Capelli\ r(A) = r(A/\bar{b}) = 2$

Sistema compatibile ∞^1 soluzioni che dipendono dagli infiniti valori che può assumere la variabile z.

$\begin{cases} z = \beta \\ 2x + 2y = 1 + \beta \\ 2x - y = 2 + \beta \end{cases}$ si applica la regola di Cramer per determinare le soluzioni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+\beta & 2 \\ 2+\beta & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{3\beta + 5}{6} = \frac{1}{2}\beta + \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+\beta \\ 2 & 2+\beta \end{vmatrix}}{-6} = \frac{1}{3} \qquad Q\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{5}{6};\ -\frac{1}{3};\beta\right)$$