Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 7 luglio 2020

Prova scritta del 7 luglio 2020 ore 9:00

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x + ky + 6z = k \\ kx + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.
SOLUZIONE:

Il sistema ha $m = 2$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & k & 6 \\ k & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 4 & k & 6 & k \\ k & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando la seconda e la terza colonna di A si ha il seguente minore di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} k & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3k - 6$$

e risulta $-3k - 6 \neq 0 \leftrightarrow k \neq -2$. Dunque per $k \neq -2$ si ha $r(A) = r(A|b) = 2$ e il sistema risulta compatibile con $\infty^3 - 2$ soluzioni.
Per $k \neq -2$ le soluzioni del sistema si individuano risolvendo il seguente sistema ridotto in y e z:

$$\begin{cases} ky + 6z = k - 4x \\ y - 3z = 1 - kx \end{cases}$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = \alpha, \quad \alpha \in \Re \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} k - 4\alpha & 6 \\ 1 - k\alpha & -3 \end{vmatrix}}{-3k - 6} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} k & k - 4\alpha \\ 1 & 1 - k\alpha \end{vmatrix}}{3k - 3}$$

Per $k = -2$ si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

da cui risulta che la prima riga di A è uguale alla seconda riga moltiplicata per -2. Per $k = -2$ si conclude quindi che $r(A) = 1$. Si poteva giungere alla stessa conclusione calcolando gli altri due minori di A di ordine 2 e verificando che sono tutti nulli. Con argomentazioni analoghe si conclude anche $r(A|b) = 1$. Segue che per $k = -2$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni che si possono calcolare ad esempio dal sistema ridotto nella sola variabile z formato dalla sola seconda equazione del sistema:

$$\{ \ 3z = -2x + y - 1$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = \alpha, \quad \alpha \in \Re \qquad y = \beta, \quad \beta \in \Re \qquad z = \frac{-2\alpha + \beta - 1}{3}$$

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{3x + 4}{(2x + 3)^3}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, +\infty)$
Intersezioni con gli assi cartesiani: $(0, \frac{4}{27})$ e $(-\frac{4}{3}, 0)$

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{4}{3}, +\infty)$ e $f(x) < 0$ in $(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3})$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
$x_0 = -\frac{3}{2}$ è un punto di singolarità per $f(x)$
Si ha: $lim_{x \to -\frac{3}{2}^-} f(x) = +\infty$ e $lim_{x \to -\frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ ha asintoto verticale $x = -\frac{3}{2}$
$f(x)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$
$f(x)$ non ha asintoti obliqui

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{-12x-15}{(2x+3)^4}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$
$f'(x) = 0$ per $x_M = -\frac{5}{4}$ (punto di massimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(-\frac{5}{4}, +\infty)$

Derivata seconda:
$f''(x) = \frac{72x+84}{(2x+3)^5}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{14}{12}, +\infty)$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(-\frac{3}{2}, -\frac{14}{12})$

$x_F = -\frac{14}{12}$ è un punto di flesso per $f(x)$.
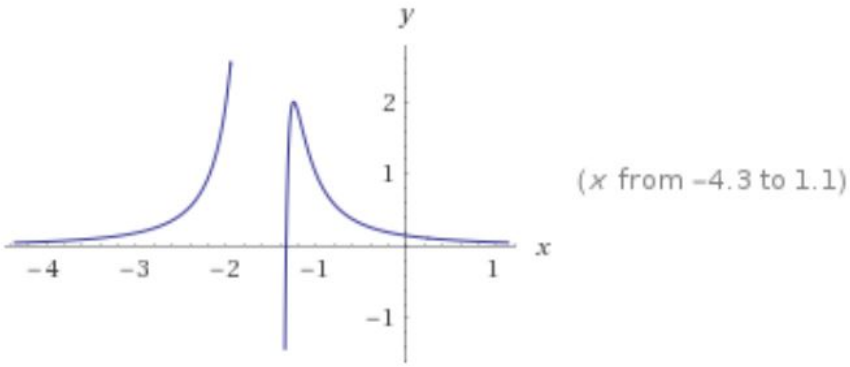
Grafico di $f(x)$: