Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 12 giugno 2020

Prova scritta del 12 giugno 2020 ore 11:00

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} kx - 3y + z = 1 \\ 3x - ky + 3z = 0 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.
SOLUZIONE:

Il sistema ha $m = 2$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} k & -3 & 1 \\ 3 & -k & 3 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} k & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -k & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

I minori di ordine 2 di A sono i seguenti:

$$\begin{vmatrix} k & -3 \\ 3 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + 9$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 3$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -k & 3 \end{vmatrix} = -9 + k.$$

Si conclude dunque che $r(A) = r(A|b) = 2 \ \forall k \in \Re$ e il sistema risulta sempre compatibile con $\infty^3 - 2$ soluzioni.

Considerando il minore

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 3$$

si ha $3k - 3 \neq 0 \leftrightarrow k \neq 1$ e pertanto per $k \neq 1$ le soluzioni del sistema si individuano risolvendo il seguente sistema ridotto in x e z:

$$\begin{cases} kx + z = 1 + 3y \\ 3x + 3z = ky \end{cases}$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 + 3\alpha & 1 \\ k\alpha & 3 \end{vmatrix}}{3k - 3} \qquad y = \alpha, \alpha \in \Re \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 + 3\alpha \\ 3 & k\alpha \end{vmatrix}}{3k - 3}$$

Per $k = 1$ si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e le soluzioni del sistema si individuano risolvendo il seguente sistema ridotto in y e z:

$$\begin{cases} -3y + z = 1 - x \\ -y + 3z = -3x \end{cases}$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = \alpha, \alpha \in \Re \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \alpha & 1 \\ -3\alpha & 3 \end{vmatrix}}{-8} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 - \alpha \\ -1 & -3\alpha \end{vmatrix}}{-8}$$

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $\Re$
Intersezioni con gli assi cartesiani: $(0, -2)$ e $(2, 0)$

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $(2, +\infty)$ e $f(x) < 0$ in $(-\infty, 2)$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$): $f(x)$ non ha punti di singolarità

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ non ha asintoti verticali
$f(x)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$
$f(x)$ non ha asintoti obliqui

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$
$f'(x) = 0$ per $x_m = 2-\sqrt{5}$ (punto di minimo relativo) e $x_M = 2+\sqrt{5}$ (punto di massimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(-\infty, 2-\sqrt{5}) \cup (2+\sqrt{5}, +\infty)$

Derivata seconda:
$f''(x) = \frac{2(x^3-6x^2-3x+2)}{(x^2+1)^3}$
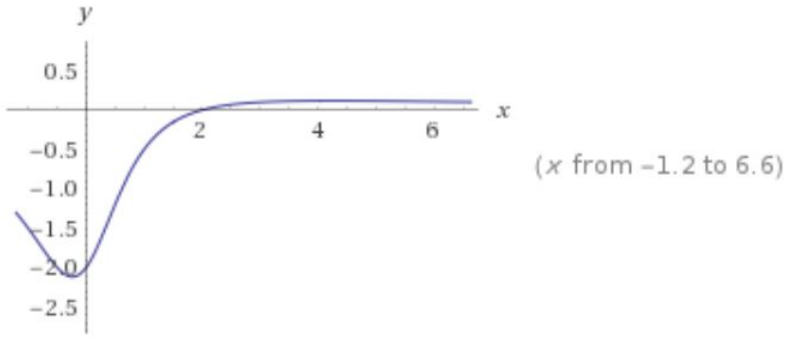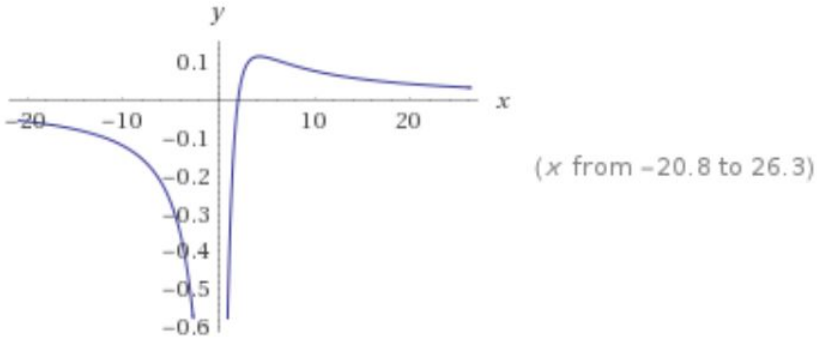
Grafico di $f(x)$: