Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 10 settembre 2020

Prova scritta del 10 settembre 2020 ore 11:00

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x + 3ky - 6z = -2 \\ x + 2y - kz = 1 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.

SOLUZIONE:

Il sistema ha $m = 2$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3k & -6 \\ 1 & 2 & -k \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 3 & 3k & -6 & -2 \\ 1 & 2 & -k & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando la prima e la terza colonna di A si ha il seguente minore di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 6 - 3k$$

e risulta $6 - 3k \neq 0 \leftrightarrow k \neq 2$. Dunque per $k \neq 2$ si ha $r(A) = r(A|b) = 2$ e il sistema risulta compatibile con ∞^{3-2} soluzioni.
Per $k \neq 2$ le soluzioni del sistema si individuano risolvendo il seguente sistema ridotto in x e z:

$$\begin{cases} 3x - 6z = -2 - 3ky \\ x - kz = 1 - 2y \end{cases}$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 - 3k\alpha & -6 \\ 1 - 2\alpha & -k \end{vmatrix}}{6 - 3k} \qquad y = \alpha, \;\; \alpha \in \Re \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 - 3k\alpha \\ 1 & 1 - 2\alpha \end{vmatrix}}{6 - 3k}$$

Per $k = 2$ si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

da cui risulta che la prima riga di A è uguale alla seconda riga moltiplicata per 3. Per $k = 2$ si conclude quindi che $r(A) = 1$. Si poteva giungere alla stessa conclusione calcolando gli altri due minori di A di ordine 2 e verificando che sono tutti nulli. Per la matrice completa si ha invece $r(A|b) = 2$ dato che ad esempio il minore di ordine 2 di $A|b$ formato dalle sue colonne terza e quarta risulta diverso da 0:

$$\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Si conclude che per $k = 2$ il sistema è incompatibile.

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$
Intersezioni con gli assi cartesiani: $(0, -\frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{2}, 0)$

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ e $f(x) < 0$ in $(-3, \frac{1}{2})$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
$x_0 = -3$ è un punto di singolarità per $f(x)$
Si ha: $lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$ e $lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ e $lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ ha asintoto verticale di equazione $x = -3$
$f(x)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 2$

$f(x)$ non ha asintoti obliqui

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$
$f'(x) = 0$ mai
$f'(x) < 0$ mai
$f(x)$ non ha punti di massimo relativo e non ha punti di minimo relativo

Derivata seconda:
$f''(x) = \frac{-14}{(x+3)^3}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(-\infty, -3)$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(-3, +\infty)$

Non ci sono punti di flesso per $f(x)$.
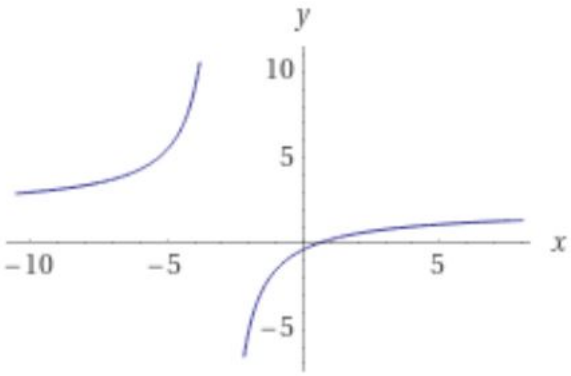
Grafico di $f(x)$: