Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 10 settembre 2020

Prova scritta del 10 settembre 2020 ore 14:00

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} kx - 2y = 2k - 1 \\ x - 2ky = k \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.
SOLUZIONE:

Il sistema ha $m = 2$ equazioni in $n = 2$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} k & -2 \\ 1 & -2k \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} k & -2 & 2k-1 \\ 1 & -2k & k \end{bmatrix}.$$

Siccome A è 2 per 2, si ha $r(A) = 2$ se e solo se $det(A) \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} k & -2 \\ 1 & -2k \end{vmatrix} = -2k^2 + 2 = 2(1 - k^2)$$

e risulta $-2k^2 - +2 \neq 0 \leftrightarrow 2(1-k^2) \neq 0 \leftrightarrow k \neq \pm 1$. Dunque per $k \neq \pm 1$ si ha $r(A) = r(A|b) = 2$ e il sistema risulta compatibile con una unica soluzione che si individua risolvendo il sistema in x e y:

$$\begin{cases} kx - 2y = 2k - 1 \\ x - 2ky = k \end{cases}$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2k-1 & -2 \\ k & -2k \end{vmatrix}}{2(1-k^2)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ 1 & k \end{vmatrix}}{2(1-k^2)}$$

Per $k = 1$ si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

e

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

da cui risulta che $r(A) = r(A|b) = 1$. Si conclude che per $k = 1$ il sistema è compatibile con ∞^{2-1} soluzioni che si possono calcolare risolvendo il seguennte sistema ridotto in x:

$$\{ \ x = 1 + 2y$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = 1 + 2\alpha \qquad y = \alpha, \ \ \alpha \in \Re$$

Per $k = -1$ si ha:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$(A|b) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per la matrice incompleta A si ha $r(A) = 1$, dato che la prima riga di A è uguale alla seconda moltiplicata per -1. Per la matrice incompleta, invece, considerando il minore di ordine 2 formato dalla sua prima e terza colonna, si ha:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

e risulta quindi $r(A|b) = 2$. Si conclude che per$k = -1$ il sistema risulta incompatibile.

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{2x - 8}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$
Intersezioni con gli assi cartesiani: $(0, 0)$ e $(3, 0)$

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $x \in (-\infty, 0) \cup (3, 4)$ e $f(x) < 0$ in $(0, 3) \cup (4, +\infty)$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
$x_0 = 4$ è un punto di singolarità per $f(x)$
Si ha: $lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ e $lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

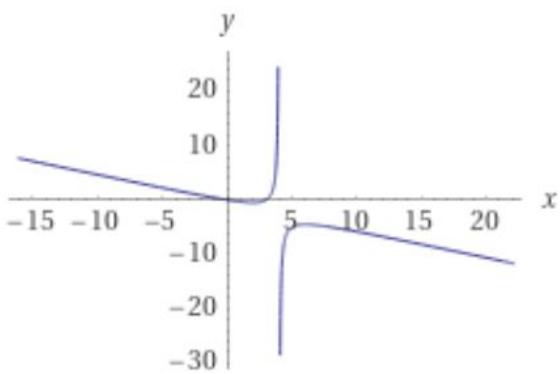
Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ ha un asintoto vertical3 $x = 4$
$f(x)$ non ha asintoti orizzontali
$f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{-2x^2+16x-24}{(2x-8)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(2, 4) \cup (4, 6)$
$f'(x) = 0$ per $x_M = 6$ (punto di massimo relativo) e per $x_m = 3$ (punto di minimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

Derivata seconda:
$f''(x) = -\frac{32}{(2x-8)^3}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(-\infty, 4)$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(4, +\infty)$

Non ci sono punti di flesso per $f(x)$.

Grafico di $f(x)$:


y
20
10
x
−15
−10
−5
5
10
15
20
−10
−20
−30