Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 12 giugno 2020

Prova scritta del 12 giugno 2020 ore 16:30

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + z = k \\ x - 2y - kz = -1 \\ -2x + 4ky + 2z = k + 1 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.
SOLUZIONE:

Innanzi tutto si osserva che il sistema è omogeneo e quindi ammette sempre come soluzione il vettore tutto nullo. Il sistema ha $m = 3$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -k \\ -2 & 4k & 2 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & k \\ 1 & -2 & -k & -1 \\ -2 & 4k & 2 & k+1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A_3:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -k \\ -2 & 4k & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4 + 4k^2) - 2(2 - 2k) + 1 \cdot (4k - 4) = -4k^2 + 8k - 4$$

Si ha $-k^2+2k-1 \neq 0 \leftrightarrow k \neq 1$ e dunque, per $k \neq 1$ si ha $r(A) = r(A|b) = 3$ e il sistema ammette soluzione unica la cui forma generale è:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -k \\ k+1 & 4k & 2 \end{vmatrix}}{-4k^2+8k-4} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & -k \\ -2 & k+1 & 2 \end{vmatrix}}{-4k^2+8k-4} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & k \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4k & k+1 \end{vmatrix}}{-4k^2+8k-4}$$

Per $k = 1$ la matrice $(A|b)$ diventa:

$$(A|b) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e si ha $r(A) = r(A|b) = 1$ dato che la seconda riga di $(A|b)$ è uguale alla sua prima riga moltiplicata per -1 e e la terza riga è uguale alla sua prima riga moltiplicata per 2.
Per $k = 1$ il sistema ammette $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni che si possono calcolare considerando il sistema ridotto formato dalla prima equazione del sistema e nella variabile x:

$$\{ \ x = -1 + 2y + z$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = -1 + 2\alpha + \beta \qquad y = \alpha, \ \alpha \in \Re \qquad z == \beta, \ \beta \in \Re$$

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $\Re$

Intersezioni con gli assi cartesiani:
Ci sono 3 punti di intersezione: $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ e $f(x) < 0$ in $(-1,1)$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
Non ci sono punti di singolarità per $f(x)$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ non ha asintoti verticali
$f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 1$
$f(x)$ non ha asintoti obliqui

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(0, +\infty)$
$f'(x) = 0$ per $x = 0$ (punto di minimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(-\infty, 0)$

Derivata seconda e suo segno (intervalli in cui $f(x)$ concava e convessa e punti di flesso):
$f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x+1)^3}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

Punti di flesso: $x_{F1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_{F2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
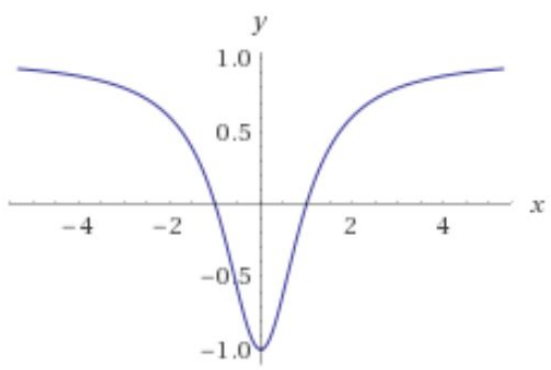
Grafico di $f(x)$: