Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 7 luglio 2020

Prova scritta del 8 luglio 2020 ore 9:30

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} kx + y + 2z = 2 \\ 2x + y + kz = 4 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.
SOLUZIONE:

Il sistema ha $m = 2$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} k & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & k & 4 \end{bmatrix}.$$

Considerando la prima e la seconda colonna di A si ha il seguente minore di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = k - 2$$

e risulta $k - 2 \neq 0 \leftrightarrow k \neq 2$. Dunque per $k \neq 2$ si ha $r(A) = r(A|b) = 2$ e il sistema risulta compatibile con $\infty^3 - 2 = \infty$ soluzioni.
Per $k \neq 2$ le soluzioni del sistema si individuano risolvendo il seguente sistema ridotto in x e y:

$$\begin{cases} kx + y = 2 - 2z \\ 2x + y = 4 - kz \end{cases}$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-2\alpha & 1 \\ 4-k\alpha & 1 \end{vmatrix}}{k-2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 2-2\alpha \\ 2 & 4-k\alpha \end{vmatrix}}{k-2} \qquad z = \alpha, \quad \alpha \in \Re$$

Per $k = 2$ si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

da cui risulta che le due righe di A sono indentiche. Ne consegue che $r(A) = 1$. Per la matrice completa invece si ha che ad esempio il minore di ordine 2 formato dalla terza e quarta colonna è:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

che implica che per $k = 2$ si ha $r(A|b) = 2$. Si conclude dunque che, per $k = 2$ il sistema è incompatibile.

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x-1}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
Intersezioni con gli assi cartesiani: $(0, -4)$.

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $(1, +\infty)$ e $f(x) < 0$ in $x \in (-\infty, 1)$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
$x_0 = 1$ è un punto di singolarità per $f(x)$
Si ha: $lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ e $lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ e $lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ ha asintoto verticale $x = 1$
$f(x)$ non ha asintoti orizzontali

$f(x)$ ha asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(-\infty, 1-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 1+\infty)$
$f'(x) = 0$ per $x_M = 1-\sqrt{5}$ (punto di massimo relativo) e per $x_m = 1+\sqrt{5}$ (punto di minimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$

Derivata seconda:
$f''(x) = \frac{10}{(x-1)^3}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(1, +\infty)$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(-\infty, 1)$

Non ci sono punti di flesso per $f(x)$.
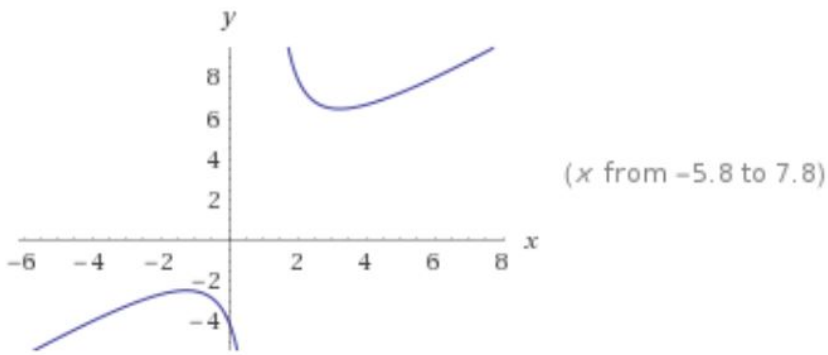
Grafico di $f(x)$: