Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 12 giugno 2020

Prova scritta del 15 giugno 2020 ore 9:30

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} kx - 3y = 1 \\ 3x - ky = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.
SOLUZIONE:

Innanzi tutto si osserva che il sistema è omogeneo e quindi ammette sempre come soluzione il vettore tutto nullo. Il sistema ha $m = 3$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 3 & -k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} k & -3 & 1 \\ 3 & -k & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di $(A|b)$:

$$|(A|b)| = \begin{vmatrix} k & -3 & 1 \\ 3 & -k & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k(-k-3) + 3 \cdot 0 + 1(3+k) = -k^2 - 2k + 3$$

Si ha $-k^2 - 2k + 3 \neq 0 \leftrightarrow k \neq -3, 1$. Siccome $r(A) \leq 2 \forall k$, si conclude che per $k \neq -3, 1$ il sistema risulta incompatibile perché $r(A) < r(A|b)$.

Per $k = -3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e evidentemente si ha $r(A) = 1$, dato che ogni riga è multiplo di ogni altra. Per $(A|b)$ si ha invece $r(A|b) = 2$ dato che il minore di ordine 2 di $(A|b)$ formato dalle prime due righe e dalla seconda e terza colonna di $(A|b)$ risulta:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 3 = -12 \neq 0.$$

Si conclude che $r(A) \neq r(A|b)$ e dunque che il sistema per $k = -3$ è incompatibile.

Per $k = 1$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e si ha $r(A) = r(A|b) = 2$ considerando il minore di ordine 2 (sia di A che di di $(A|b)$) formato dalle prime due righe e prime due colonne di A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 9 = 8 \neq 0$$

Si conclude quindi che per $k = 1$ il sistema è compatibile e ammette una soluzione unica che si ottiene risolvendo il sistema ridotto formato dalle prime due equazioni del sistema originale:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

La forma generale della soluzione è la seguente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{8} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{8}$$

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{4x + 1}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $(-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (-\frac{1}{4}, +\infty)$

Intersezioni con gli assi cartesiani:
Ci sono due punti di intersezione tra il grafico di $f(x)$ e gli assi cartesiani: $(0,0)$, $(2,0)$.

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $(-\frac{1}{4}, 0) \cup (2, +\infty)$ e $f(x) < 0$ in $(-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (0, 2)$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
$x_0 = -\frac{1}{4}$ è un punto di singolarità per $f(x)$ e si ha $lim_{x \to -\frac{1}{4}^+} f(x) = +\infty$ e $lim_{x \to -\frac{1}{4}^-} f(x) = -\infty$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = -\infty$
$f(x)$ non ha asintoti orizzontali
$f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{4}x - \frac{9}{16}$

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{4x^2+2x-2}{(4x+1)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x) = 0$ per $x = -1$ (punto di massimo relativo) e per $x = \frac{1}{2}$ (punto di minimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(-1, \frac{1}{2})$

Derivata seconda e suo segno (intervalli in cui $f(x)$ concava e convessa e punti di flesso):
$f''(x) = \frac{18}{(4x+1)^3}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(-\frac{1}{4}, +\infty)$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(-\infty, -\frac{1}{4})$

Non ci sono punti di flesso.

Grafico di $f(x)$: