Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello 12 giugno 2020

Prova scritta del 15 giugno 2020 ore 12:00

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - 2y = -k \\ -2x + 4ky = 2 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.
SOLUZIONE:

Innanzi tutto si osserva che il sistema è omogeneo e quindi ammette sempre come soluzione il vettore tutto nullo. Il sistema ha $m = 3$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4k \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -k \\ -2 & 4k & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di $(A|b)$:

$$|(A|b)| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -k \\ -2 & 4k & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4 + 4k^2) - 2(2 - 2k) + 1 \cdot (4k - 4) = -4k^2 + 8k - 4$$

Si ha $det(A|b) \neq 0 \leftrightarrow -k^2 + 2k - 1 \neq 0 \leftrightarrow k \neq 1$. Per $k \neq 1$ risulta quindi $r(A|b) = 3$, mentre $r(A) \leq 2 \forall k$ e il sistema risulta incompatibile.

Per $k = 1$ laq matrice $(A|b)$ diventa:

$$(A|b) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

e ha la seconda riga uguale alla prima cambiata di segno, mentre la terza riga è uguale alla prima moltiplicata per 2. Ci implica che si ha $r(A) = r(A|b) = 1$ e il sistema in questo caso ammette ∞^{2-1} soluzioni che possono essere calcolate risolvendo il sistema ridotto in x costituito dalla sola prima riga di A:

$$\{ \ -x + 2y = 1$$

La forma generale delle soluzioni è la seguente:

$$x = 2\alpha - 1 \qquad y = \alpha, \ \ \alpha \in \Re$$

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{3 - 2x}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

Intersezioni con gli assi cartesiani:
Ci sono 3 punti di intersezione tra il grafico di $f(x)$ e gli assi cartesiani: $(0, -\frac{1}{3})$, $(1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2})$ e $f(x) < 0$ in $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
$x_0 = \frac{3}{2}$ è un punto di singolarità per $f(x)$ e si ha $lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty$ e $lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = +\infty$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = \frac{3}{2}$
$f(x)$ non ha asintoti orizzontali
$f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = -x - 1$

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{-4x^2 + 12x - 5}{(3-2x)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

$f'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{2}$ (punto di minimo relativo) e per $x = \frac{5}{2}$ (punto di massimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$

Derivata seconda e suo segno (intervalli in cui $f(x)$ concava e convessa e punti di flesso):
$f''(x) = \frac{16}{(3-2x)^3}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(-\infty, \frac{3}{2})$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(\frac{3}{2}, +\infty)$

Non ci sono punti di flesso.
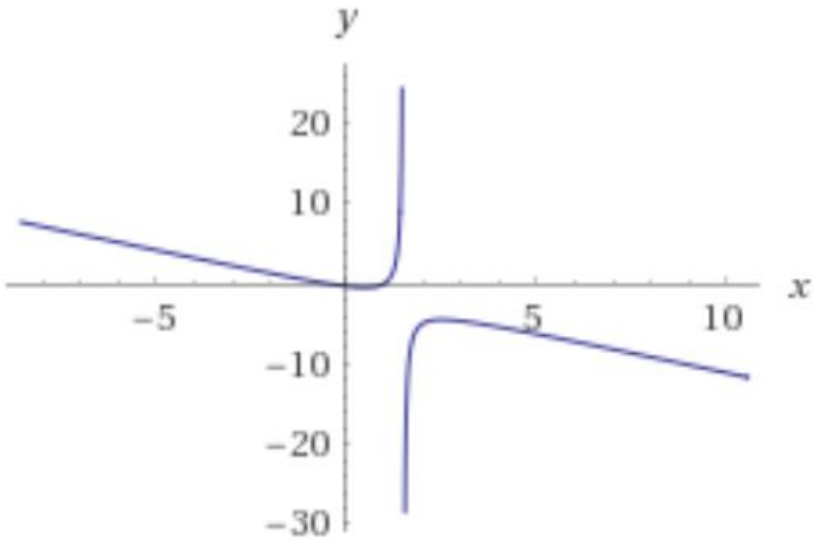
Grafico di $f(x)$: