Compito di MATEMATICA CORSO BASE
Scienze Aziendali (E-M)
Appello straordinario aprile/maggio 2020

Prova scritta del 15 maggio 2020 ore 12:00

Scrivere sul foglio risposta **nome**, **cognome**, **matricola** e **anno di corso (1,2,3, FC)**. Il mancato inserimento di questi dati non permetterà il riconoscimento dello studente e dunque potrebbe intaccarne la validità.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x + ky + 6z = k \\ kx + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Studiare il sistema al variare del parametro k. Per ogni insieme di valori di k, stabilire se il sistema è compatibile oppure no. Se il sistema è compatibile, indicare il numero delle soluzioni e calcolare le soluzioni esplicite.

SOLUZIONE:
Il sistema ha $m = 2$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & k & 6 \\ k & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 4 & k & 6 & k \\ k & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha $r(A) \leq 2$ e $r(A|b) \leq 2$.

Considerando il minore di ordine 2 formato dalla seconda e terza colonna di A (appartenente sia a A che a $(A|b)$):

$$\begin{vmatrix} k & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3k - 6$$

con $-3k - 6 \neq 0 \leftrightarrow k \neq -2$.

Dunque, per $k \neq -2$, si ha $r(A) = r(A|b) = 2$ e il sistema ha $\infty^{(n-r(A))} = \infty^{(3-2)} = \infty$ soluzioni che si possono individuare applicando la Regola di Cramer al seguente sistema ridotto:

$$\begin{cases} ky + 6z = k - 4x \\ y - 3z = 1 - kx \end{cases}$$

Per $k = -2$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 6z = -2 \\ -2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

La matrice incompleta è:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e si osserva che in entrambe la prima riga è uguale alla seconda moltiplicata per -2.

Dunque per $k = -2$, si ha $r(A) = r(A|b) = 1$ e il sistema ha $\infty^{(3-1)} = \infty^2$ soluzioni che si possono individuare risolvendo ad esempio il sistema ridotto costituito dalla prima equazione:

$$\{ \ 4x = -2 + 2y - 6z$$

La forma generale delle soluzioni del sistema è dunque:

$$x = -\frac{-2 + 2\alpha - 6\beta}{4}, \ y = \alpha, \ z = \beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

SOLUZIONE:

Dominio di $f(x)$: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Intersezioni con gli assi cartesiani:
I punti di intersezione tra il grafico di $f(x)$ e gli assi cartesiani sono: $(0, 1)$,$(-2, 0)$, $(1, 0)$

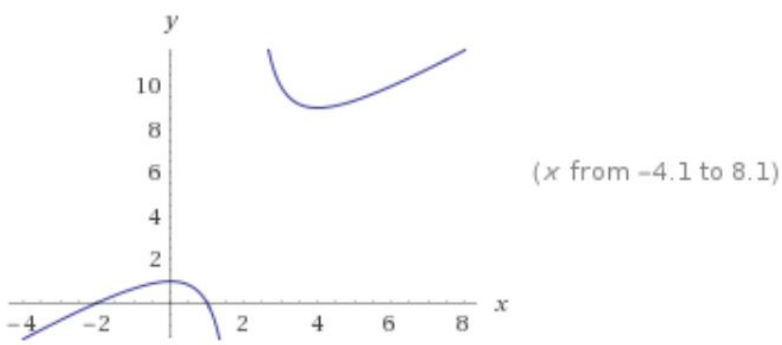
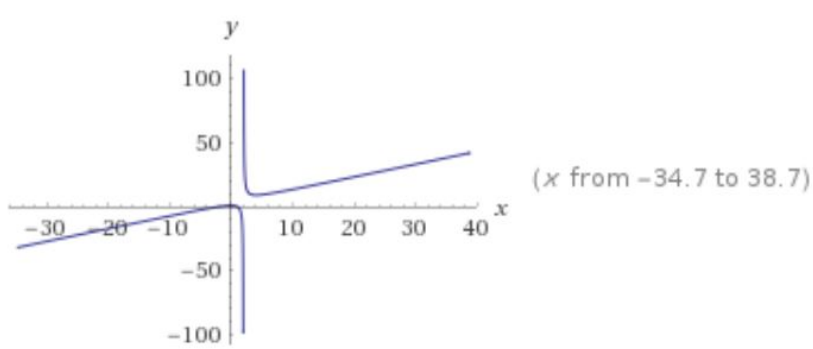
Intervalli in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$:
$f(x) > 0$ in $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$ e $f(x) < 0$ in $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$

Punti di singolarità x_0 di $f(x)$ (lim per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$):
$x_0 = 2$ è un punto di singolarità per $f(x)$ e si ha $lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ e $lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

Comportamento all'infinito di $f(x)$ (lim per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$):
Si ha: $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Equazioni cartesiane degli asintoti di $f(x)$:
$f(x)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = 2$
$f(x)$ non ha asintoti orizzontali
$f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = x + 3$

Derivata prima di $f(x)$ e suo segno (monotonia di $f(x)$ e punti di massimo e minimo locale):
$f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$
$f'(x) > 0$ ($f(x)$ crescente) in $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
$f'(x) = 0$ per $x = 0$ (punto di massimo relativo) e $x = 4$ (punto di minimo relativo)
$f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrescente) in $(0, 4)$

Derivata seconda e suo segno (intervalli in cui $f(x)$ concava e convessa e punti di flesso):
$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$
$f''(x) > 0$ ($f(x)$ convessa) in $(2, +\infty)$
$f''(x) < 0$ ($f(x)$ concava) in $(-\infty, 2)$

Non ci sono punti di flesso.
Grafico di $f(x)$: