

# METODI STATISTICI AVANZATI

12 giugno 2019

Prof. Giorgio Alleva

## ESERCIZIO (8 punti)

Data una v.c. casuale  $X$  con densità di probabilità:

$$f(x, \theta) = \frac{5\theta}{(4+3x)^{2+3\theta}} \quad \text{con } x > 0$$

- determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ ;
- illustrare le proprietà di tale metodo di stima
- confrontare tali proprietà rispetto agli stimatori dei momenti e dei minimi quadrati.

## DOMANDE APERTE (2 x 8 punti = 16 punti)

Domanda 1. Enunciare i diversi tipi di convergenza di una successione di v.c. e dimostrare la relazione tra convergenza in media quadratica e convergenza in probabilità.

Domanda 2. Descrivere la v.c. Chi quadrato presentandone:

- le principali caratteristiche e proprietà;
- l'importanza ai fini dell'inferenza statistica, ossia per quali problemi applicativi si può ricorrere a tale v.c.

## QUESITI (4 x 2 punti = 8 punti)

Q1. L'errore quadratico medio di uno stimatore  $T$  è:

- $E [T - E(T)]^2$
- $E(T - \theta)^2$
- $E |T - \theta|$

Q2. L'affermazione "se due v.c.  $X$  e  $Y$  sono incorrelate allora sono indipendenti" è:

- sempre vera
- sempre falsa
- vera se  $X$  e  $Y$  sono v.c. normali

Q3. L'affermazione "uno stimatore è consistente se il suo errore quadratico medio tende a zero al crescere di  $n$ " è:

- sempre vera
- sempre falsa
- nessuna delle precedenti

Q4. La relazione tra la varianza della v.c. Binomiale e la varianza della v.c. Estrazione in blocco

- la prima è sempre minore o uguale della seconda
- la seconda è sempre minore o uguale della prima
- nessuna delle precedenti

# METODI STATISTICI AVANZATI

12 giugno 2019

Prof. Giorgio Alleva

## ESERCIZIO (8 punti)

Sia  $X$  una variabile casuale con distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$ .

- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\lambda$ .
- Determinare lo stimatore dei momenti di  $\lambda$ .
- Illustrare le proprietà di tali due metodi di stima.

## DOMANDE APERTE (2 x 8 punti = 16 punti)

Domanda 1. A partire dalla definizione di convergenza in distribuzione di  $n$  variabili casuali (a), enunciare il teorema di Laplace e gli altri teoremi ad esso collegati (b).

Domanda 2. Descrivere la v.c.  $t$  di Student presentandone:

- le principali caratteristiche e proprietà;
- l'importanza ai fini dell'inferenza statistica, ossia per quali problemi applicativi si può ricorrere a tale v.c.

## QUESITI (4 x 2 punti = 8 punti)

Q1. Lo stimatore  $T_1$  è più efficiente dello stimatore  $T_2$  se:

- $E(T_1) < E(T_2)$
- $\sigma^2_{T_1} < \sigma^2_{T_2}$
- $MSE(T_1) < MSE(T_2)$

Q2. La distribuzione  $\chi^2$  è ottenibile come:

- somma di quadrati di v.c. i.i.d  $N(\mu; \sigma^2)$
- somma di quadrati di v.c. i.i.d  $N(\mu; 1)$
- nessuno dei precedenti

Q3. L'affermazione "uno stimatore è consistente se la sua varianza tende a zero al crescere di  $n$ " è:

- sempre vera
- sempre falsa
- nessuna delle precedenti

Q4. Qualora la correlazione tra due variabili  $X$  e  $Z$  sia pari a 1 allora:

- $R^2_{YZ}$  è indeterminato
- $R_{YX} = R_{YZ}$
- la correlazione parziale tra  $XZ$  al netto di  $Y$  è pari a 0

# METODI STATISTICI AVANZATI

5 luglio 2019

Prof. Giorgio Alleva

## ESERCIZIO (8 punti)

Data una v.c. casuale  $X$  con densità di probabilità  $f(x, \theta) = \frac{6x}{\theta^2}$  con  $x \in (0, \theta]$  e  $\theta > 0$ .

- Determinare l'espressione dello stimatore dei momenti.
- Calcolare lo stimatore dei momenti utilizzando le seguenti osservazioni

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$
2	2,5	3	2,6	4,5	3,7	3,5	3,3	4	4,2

- Verificare se lo stimatore ottenuto sia corretto per il parametro  $\theta$ .
- Calcolare il valore dell'errore quadratico medio dello stimatore dei momenti utilizzando il valore delle osservazioni fornite.

## DOMANDE APERTE (2 x 8 punti = 16 punti)

**Domanda 1.** La legge dei grandi numeri: le diverse formulazioni e la sua importanza nell'inferenza statistica.

**Domanda 2.** Presentare l'approccio bayesiano della stima parametrica e le caratteristiche che presentano tali stimatori (a); mostrare come si ricava lo stimatore bayesiano della proporzione o della media (b).

## QUESITI (4 x 2 punti = 8 punti)

Q1. La v.c. Normale doppia dipende da un numero di parametri pari a:

- 2
- 4
- 5

Q2. L'affermazione la v.c. Poisson converge alla Binomiale al crescere di  $n$  è:

- Vera
- Vera solo se  $\lambda$  tende a 0
- Nessuna delle precedenti

Q3. Uno stimatore  $T_1$  è più efficiente di  $T_2$  se:

- presenta una minore varianza;
- presenta un minore errore quadratico medio;
- ha una varianza pari all'estremo inferiore della disuguaglianza di Frechet Rao Cramer

Q4. L'affermazione "la v.c. binomiale converge in distribuzione alla v.c. normale"

- E' sempre valida
- Non è mai valida
- E' valida solo se al crescere di  $n$  rimane costante il parametro  $p$

# METODI STATISTICI AVANZATI

5 luglio 2019

Prof. Giorgio Alleva

## ESERCIZIO (8 punti)

Sia  $X$  una variabile casuale con distribuzione normale di media  $\mu$  non nota e varianza unitaria.

Dalla suddetta popolazione viene estratto un campione casuale di ampiezza  $n=6$  ottenendo le seguenti realizzazioni: 5,10,12,16,25,30.

- Una volta indicata l'espressione dello stimatore di massima verosimiglianza per  $\mu$  calcolarne il valore in corrispondenza della realizzazione campionaria.
- Verificare se lo stimatore sia consistente.
- Dato lo stimatore  $T = \frac{4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5}{5}$ , verificare se sia corretto per  $\mu$ .
- Verificare se lo stimatore  $T$  sia consistente.
- Quale stimatore dei due stimatori è preferibile? Giustificare la risposta utilizzando anche i teoremi.

## DOMANDE APERTE (2 x 8 punti = 16 punti)

**Domanda 1.** La variabile normale semplice e multipla. a) Mostrare il teorema sulla combinazione di v.c. normali e la sua importanza; b) mostrare che l'indipendenza lineare tra le v.c. componenti di una variabile normale doppia implica la loro indipendenza.

**Domanda 2.** Gli stimatori BLU. a) Presentare in generale tali stimatori, anche in termini di informazioni necessarie ed assunzioni sulle  $n$  v.c. che formano il campione; b) mostrare come si ricava lo stimatore BLU della media in una o più circostanze.

## QUESITI (4 x 2 punti = 8 punti)

Q1. Quale v.c. ha media e varianza sempre uguali

- v.c. Binomiale
- v.c. Poisson
- v.c. t di student

Q2. L'affermazione "la varianza di una combinazione lineare di variabili è la combinazione lineare delle varianze delle variabili" è:

- sempre corretta
- corretta solo se le variabili sono indipendenti
- nessuna delle precedenti

Q3. L'affermazione "la media campionaria di  $n$  v.c. variabili si distribuisce come una normale" è:

- sempre vera
- vera solo se le  $n$  v.c sono normali
- vera solo se le  $n$  v.c sono normali e indipendenti

Q4. L'affermazione "il metodo di stima LSE presuppone la conoscenza della distribuzione della verosimiglianza delle v.c. errore" è:

- falsa
- vera
- a volte vera a volte falsa

# METODI STATISTICI AVANZATI

9 settembre 2019

Prof. Giorgio Alleva

## ESERCIZIO (8 punti)

Da una popolazione  $X$  con distribuzione uniforme in  $[\theta - 1, \theta + 1]$  con parametro  $\theta$  incognito, si estrae con ripetizione un campione di ampiezza  $n \geq 3$ . Si considerino i seguenti stimatori del parametro  $\theta$ :

$$T_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

$$T_2 = \bar{X} \quad (\text{ove } \bar{X} \text{ è la media campionaria}).$$

Una volta verificato se siano corretti, valutare gli stimatori sulla base dell'efficienza relativa.

## DOMANDE APERTE (2 x 8 punti = 16 punti)

**Domanda 1.** Le caratteristiche degli stimatori. Definire le principali caratteristiche degli stimatori e le condizioni che ne assicurano la presenza (a). Presentare il metodo di stima della massima verosimiglianza applicandolo per la stima della proporzione  $p$  (b) e le proprietà di tali stimatori (c).

**Domanda 2.** La multicollinearità nel modello di regressione multipla. Definire quando si presenta (a), le conseguenze sul modello (b), come si misura e se ne accerta la presenza (c), le decisioni che si prendono quando sia presente (d).

## QUESITI (4 x 2 punti = 8 punti)

Q1. La v.c. Normale doppia dipende da un numero di parametri pari a:

- 2
- 4
- 5

Q2. L'affermazione la v.c. Poisson converge alla Binomiale al crescere di  $n$  è:

- Vera
- Vera solo se  $\lambda$  tende a 0
- Nessuna delle precedenti

Q3. Uno stimatore  $T_1$  è più efficiente di  $T_2$  se:

- presenta una minore varianza;
- presenta un minore errore quadratico medio;
- ha una varianza pari all'estremo inferiore della disuguaglianza di Frechet Rao Cramer

Q4. L'affermazione "la v.c. binomiale converge in distribuzione alla v.c. normale"

- E' sempre valida
- Non è mai valida
- E' valida solo se al crescere di  $n$  rimane costante il parametro  $p$

# METODI STATISTICI AVANZATI

11 novembre 2019

Prof. Giorgio Alleva

## ESERCIZIO (8 punti)

Sia  $X$  una singola osservazione con densità di probabilità di Bernoulli  $P(X = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$ , con  $0 < \theta < 1$ .

1. Siano  $t_1(X) = X$  e  $t_2(X) = 1/2$  due stimatori.

1. Verificare la correttezza dei due stimatori.
2. Confrontare la variabilità dei due stimatori in base al loro errore quadratico medio.
3. Valutare se sia possibile affermare che uno dei due stimatori sia preferibile all'altro.

## DOMANDE APERTE (2 x 8 punti = 16 punti)

**Domanda 1.** Gli stimatori di massima verosimiglianza. a) Presentare in generale tali stimatori, anche in termini di informazioni necessarie ed assunzioni sulle n v.c. che formano il campione; b) indicare le sue proprietà; c) mostrare come si ricava lo stimatore di massima verosimiglianza della media in una o più circostanze.

**Domanda 2.** Descrivere la v.c. t di Student presentandone:

- a) le principali caratteristiche e proprietà;
- b) l'importanza ai fini dell'inferenza statistica, ossia per quali problemi applicativi si può ricorrere a tale v.c.

## QUESITI (4 x 2 punti = 8 punti)

Q1. Gli stimatori dei minimi quadrati sono:

- sempre corretti e pienamente efficienti;
- corretti e pienamente efficienti solo se esistono
- nessuna delle precedenti

Q2. La condizione della consistenza di uno stimatore è assicurata qualora

- MSE tenda a zero al crescere di n
- La varianza dello stimatore converga a zero in probabilità
- Converga a zero sia MSE sia la varianza

Q3. L'affermazione "per n che tende all'infinito, la media campionaria di n v.c. variabili qualsiasi si distribuisce come una normale" è:

- sempre vera
- vera solo se le v.c. sono indipendenti
- vero solo se le v.c. indipendenti e identicamente distribuite

Q4. L'affermazione "la legge dei grandi numeri riguarda la convergenza in distribuzione"

- E' corretta
- Non è valida in quanto concerne la convergenza in probabilità
- Non è valida in quanto concerne la convergenza in media quadratica

# METODI STATISTICI AVANZATI

9 gennaio 2020

Prof. Giorgio Alleva

## ESERCIZIO (12 punti)

Sia  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un campione casuale estratto da una distribuzione uniforme (rettangolare) definita nell'intervallo  $[\theta, 2\theta]$  con  $\theta > 0$ .

Una volta indicate quali siano in generale le espressioni della media e della varianza di tale v.c.:

- determinare uno stimatore  $T$  di  $\theta$  con il metodo dei momenti;
- verificare se lo stimatore  $T$  sia distorto
- calcolarne l'errore quadratico medio MSE
- verificare se sia consistente.

## DOMANDE APERTE (9 punti ciascuna)

**Domanda 1.** Gli stimatori dei minimi quadrati dei parametri del modello di regressione multipla.

a) Presentare in generale tali stimatori; b) indicare le condizioni che ne assicurano le caratteristiche ottimali; c) indicare le possibili soluzioni (o approcci alternativi) qualora tali condizioni siano violate (si discutano separatamente una o due violazioni a scelta).

**Domanda 2.** Descrivere la v.c.  $t$  di Student presentandone:

- le principali caratteristiche e proprietà;
- l'importanza ai fini dell'inferenza statistica, ossia per quali problemi applicativi si può ricorrere a tale v.c.

## QUESITI (2 punti ciascuno)

Q1. Gli stimatori di massima verosimiglianza sono:

- sempre corretti e pienamente efficienti;
- asintoticamente normali
- entrambe le precedenti

Q2. La condizione della consistenza di uno stimatore è assicurata qualora

- MSE dello stimatore tenda a zero al crescere di  $n$
- La varianza dello stimatore tenda a zero al crescere di  $n$
- nessuna delle precedenti

Q3. La v.c. di Poisson con parametro  $\lambda$

- Ha media e varianza entrambe uguali a  $\lambda$
- E' una v.c. discreta con  $0 \leq X \leq \infty$
- Entrambe

Q4. Il metodo di stima dei momenti garantisce:

- stimatori corretti e consistenti
- stimatori corretti
- stimatori consistenti