Esame Matematica Corso Base

Prof.ssa Anna Attias

Corso Serale

Appello Straordinario Aprile 2022

1) Spiegare il significato geometrico della derivata e calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione

   $f(x) = ln\frac{x+2}{x+1}$ in $x_0 = 0$

2) Studiare e rappresentare la seguente funzione

   $$y = \frac{2x-4}{(x+1)^3}$$

3) Risolvere il seguente integrale

   $$\int xe^{3x^2+6}dx$$

4) Risolvere il seguente sistema lineare parametrico

   $$\begin{cases} x - y = -4 \\ -x + 2y = k^2 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

Svolgimento prova di esame Matematica Corso Base
Prof.ssa Anna Attias
Corso Serale
Appello Straordinario Aprile 2022

1. Data la funzione $y = f(x)$ continua in x_0 il limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta_x)-f(x_0)}{\Delta_x}$, se esiste ed è finito si definisce come la derivata della funzione in x_0

$$\lim_{\Delta_x \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+\Delta_x)-f(x_0)}{\Delta_x} = f'(x_0)$$

e rappresenta geometricamente la pendenza della retta tangente alla funzione nel punto $P\big((x_0\ ; f(x_0)\big)$.

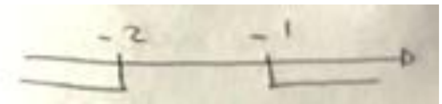
L'equazione della retta tangente è dunque:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$y = ln\frac{x+2}{x+1}$ in $x_0 = 0$

$Y(0) = ln2 \ \Longrightarrow P(0; ln2)$

dominio: $\frac{x+2}{x+1} > 0$



$\exists y \forall x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

$$y' = \frac{\cancel{x+1}}{x+2} \cdot \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}-2}{(x+1)^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{(x+2)(x+1)}$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}$$

$y - ln2 = -\frac{1}{2}x \qquad \boxed{y = -\frac{1}{2}x + ln2}$

2. $y = \frac{2x-4}{(x+1)^3}$

2.1 Definizione: funzione algebrica razionale fratta di 4° grado

2.2 Dominio: $x + 1 \neq 0 \qquad x \neq -1$

$\exists y \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

$x = 1$ punto singolare

2.3 Intersezione con gli assi

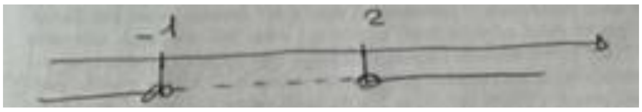
$\begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \qquad A(0; -4) \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \qquad B(2; 0)$

2.4 Studio del Segno

$$\frac{2x - 4}{(x + 1)^3} \geq 0$$

$N: 2x - 4 \geq 0; \; x \geq 2$

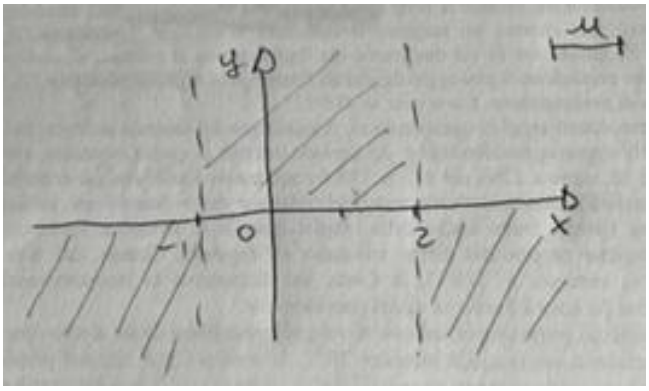
$D: x + 1 > 0; \; x > -1$



$f(x) > 0 \forall x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

$f(x) < 0 \; \forall x \in (-1; 2)$

2.5 Grafico a zone



2.6 Studio singolarità

$\lim_{x \to -1} \frac{2x-4}{(x+1)^3} = \infty$ studiamo l'intorno circolare bucato di -1

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x-4}{(x+1)^3}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^-}\frac{2x-4}{(x+1)^3}=+\infty$$

$x=-1$ punto di infinito

2.7 Asintoti verticali

$x=-1$

2.8 Comportamento all'infinito

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x-4}{(x+1)^3}=0$$

$y=0$ asintoto orizzontale

2.9 Intersezione tra asintoto orizzontale e funzione

$B(2;0)$

2.10 Derivata prima

$$y'=\frac{2(x+1)^3-3(x+1)^2(2x-4)}{(x+1)^6}=\frac{2(x+1)-3(2x-4)}{(x+1)^4}=\frac{-4x+14}{(x+1)^4}$$

2.11 Teorema di Fermat del 1° ordine

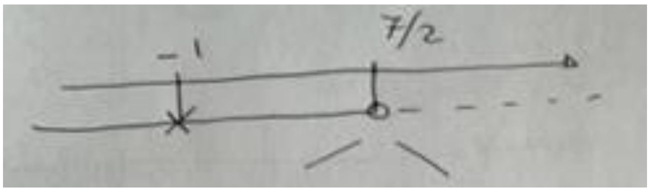
$-4x+14=0 \quad x=\frac{7}{2}$ punto stazionario potenziale massimo o minimo.

2.12 Crescenza e decrescenza

$$\frac{-4x+14}{(x+1)^4}\geq 0$$

$N: -4x+14\geq 0;\ \ 4x-14x\leq 0 \ \ x\leq \dfrac{7}{2}$

$D: (x+1)^4>0;\ \ \forall\, x\in Dominio$



$f(x)$è crescente $\forall x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{2}\right)$

$f(x)$ è decrescente $\forall x \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$

$x = \frac{7}{2}$ punto di massimo

$y\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{3}$ $\qquad M\left(\frac{7}{2}; \frac{2}{3}\right)$

2.13 Derivata seconda

$$y" = \frac{-4(x+1)^4 - 4(x+1)^3(-4x+14)}{(x+1)^8} = -4\frac{x+1-4x+14}{(x+1)^5} = 4\frac{3x-15}{(x+1)^5}$$

2.14 Teorema di Fermat del 2° ordine

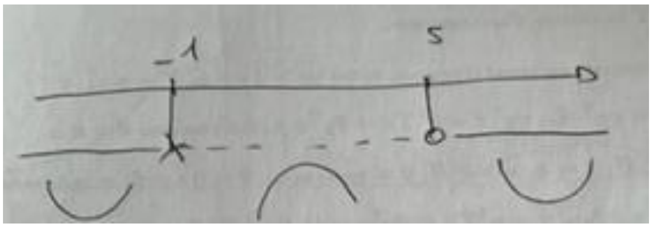
$3x - 15 = 0 \qquad x = 5$ potenziale punto di Flesso

2.15 Concavità e convessità

$$4\frac{3x-15}{(x+1)^5} \geq 0$$

$N: 3x - 15 \geq 0; \;\; x \geq 5$

$D: (x+1)^5 > 0; \; x > -1$



$f(x)$ è convessa $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

$f(x)$ è concava $\forall x \in (-1; 5)$

$x = 5$ punto di flesso

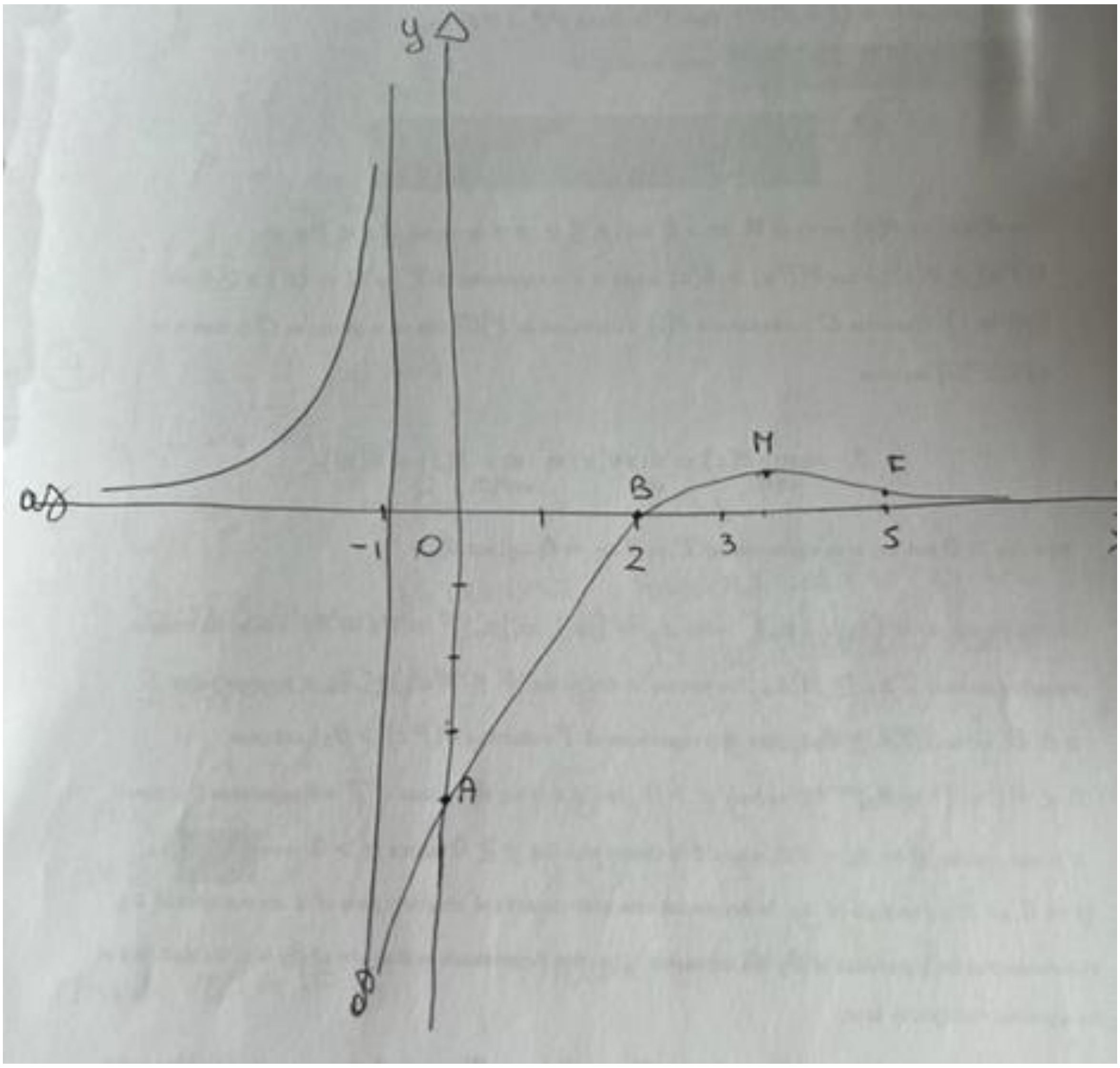
$y(5) = \frac{1}{36}$ $\qquad F\left(5; \frac{1}{36}\right)$

2.16 Tangente di flesso

$y'(5) = \frac{1}{216}$

$y - \frac{1}{36} = \frac{1}{216}(X - 5)$

Grafico funzione:



3. $\int xe^{3x^2+6}dx = \frac{1}{6}\int 6xe^{3x^2+6}dx = \frac{1}{6}\int e^{3x^2+6}dx(3x^2+6) = \frac{1}{6}e^{3x^2+6} + c$

4. $\begin{cases} x - y = -4 \\ -x + 2y = k^2 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

Sistema lineare parametrico di 3 equazioni in due incognite

$\underset{3x2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \underset{3x3}{A/\bar{b}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & k^2 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

$max\, r(A) = 2 \quad max\, r\left(A/\bar{b}\right) = 3$

$\left|A/\bar{b}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & k^2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -4k^2 + 36$

$-4k^2 + 36 = 0 \qquad k^2 = 9 \qquad k = \pm 3$

Se $k \neq \pm 3 \implies r\left(A/\bar{b}\right) = 3 \neq r(A) \implies$ sistema incompatibile per il Teorema di Rouchè Capelli $\Longrightarrow$ no soluzioni.

Se $k = \pm 3$ il sistema diventa

$\begin{cases} x - y = -4 \\ -x + 2y = 9 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

$\underset{3x2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \underset{3x3}{A/\bar{b}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

$max\, r(A) = 2 \quad max\, r\left(A/\bar{b}\right) = 2$

Si estrae un minore da A di ordine 2

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \implies r(A) = 2 = r\left(A/\bar{b}\right) \Longrightarrow$ per il Teorema di Rouchè Capelli il sistema è compatibile e ammette $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzione

La terza equazione è ridondante e quindi il sistema diventa

$\begin{cases} x - y = -4 \\ -x + 2y = 9 \end{cases}$

si può applicare la regola di Cramer per determinare le soluzioni

$x = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 9 = 1$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$P(1; 5)$