Compito di MATEMATICA CORSO BASE del _____

Cognome _____ **Nome** _____

Matricola _____

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ -kx + 9y = 3 \\ -4x + ky = 2 \end{cases}$$

Si trovino il numero delle soluzioni al variare del parametro k e le soluzioni esplicite.

$k \neq 6 \rightarrow r(A) \leq 2$ e $r(A|b) = 3 \Rightarrow$ sist. incomp.

$k = 6 \Rightarrow r(A) = r(A|b) = 1 \rightarrow$ sist comp $\infty^{2-1} = \infty$ sol.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{1+2\alpha}{3} \end{cases}$$

Esercizio 2. Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

intersezioni con gli assi cartesiani No

segno $f(x) > 0$ per $x > 0$

singolarità $x_0 = 0$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

comportamento all'infinito $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

equazioni cartesiane degli asintoti A.O. $y = 1$ e $y = -1$ A.V. $x = 0$

intersezione tra la funzione e i suoi asintoti No

derivata prima e suo segno $f'(x) = -\dfrac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$ sempre negativa

intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente $f(x)$ sempre decrescente

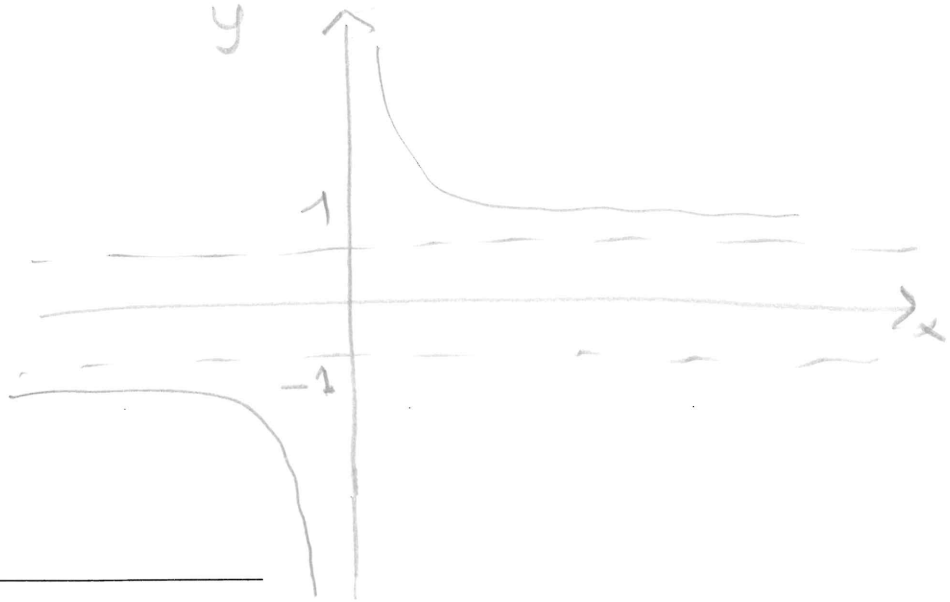
punti di massimo e minimo locali NO

derivata seconda e suo segno $f''(x) = \frac{2e^x(e^x-1)(e^x+1)}{(e^x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}$ $f''(x)>0 \leftrightarrow x>0$

punti di flesso NO

equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso

grafico



Esercizio 3. Risolvere il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} =$$

$x^2-3x+2=0 \leftrightarrow x=1,2$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x-2)}dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c$$

Soluzione: $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}$ $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

Esercizio 4. Calcolare il Polinomio di Taylor di grado $n=2$ della funzione seguente nel punto $x_0=0$:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

Soluzione:

$P_{n,x_0}(x) = 1 - x + x^2$

$f(0)=1$ $f'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2}$ $f'(x_0)=-1$ $f''(x_0)=2$