

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

C.d.L.M. *Finanza e Assicurazioni*

METODI E MODELLI PER LA FINANZA – A.A. 2018/2019

Esame 03/09/2019

**Esercizio 1.** Descrivere il modello di Heston, tanto sotto la misura fisica  $\mathbb{P}$  quanto sotto la misura neutrale al rischio  $\mathbb{Q}$ , e dimostrare il teorema di Gil-Pelaez, che fornisce una espressione esplicita per la probabilità  $\mathbb{Q}(\ln(S) > \ln(K))$ .

In che modo tale probabilità interviene nella teoria dei modelli a volatilità stocastica?

**Esercizio 2.** Descrivere il modello di Vasicek per la dinamica del tasso a breve, ricavarne una soluzione esplicita e calcolare il prezzo di uno Zero-Coupon-Bond quando il tasso di interesse evolve secondo un tale modello.

**Esercizio 3.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità filtrato e sia  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$  un Moto Browniano definito su di esso. Sia, inoltre,  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un processo stocastico, definito sullo stesso spazio di probabilità, tale che

$$X_t := W_t^2, \quad t \geq 0.$$

Applicare il Lemma di Ito per determinare la dinamica del processo  $X$ .

$X$  è una martingala? Giustificare esaurientemente la risposta.