

# Esame Metodi e Modelli per la Finanza – 10.02.2021

1. (6/9 CFU) Sia  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un moto Browniano e sia  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un processo stocastico con dinamica

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad a, b, \sigma \in \mathbb{R}^+, \quad X_0 := x \text{ noto}.$$

- a. Scrivere il differenziale stocastico del processo  $Y_t := \sqrt{X_t}$ ,  $t \geq 0$ .
- b. Assumendo  $a = 2\beta$ ,  $b = \frac{1}{8\beta}$  e  $\sigma = 1$ , con  $\beta \in \mathbb{R}$ , determinare una soluzione esplicita per la SDE di  $Y_t$ , specificandone la distribuzione e calcolandone il momento primo.
2. (6/9 CFU) Dato il processo  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  determinato in Esercizio 1,
- a. determinare il prezzo di un  $T$ -ZCB sotto tale dinamica con parametri dati in 1.b;
- b. spiegare come cambierebbe il prezzo calcolato al punto 2.a se la dinamica coinvolta fosse quella del processo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  in Esercizio 1.
3. (6/9 CFU) Enunciare e dimostrare il Teorema di Girsanov. Applicare tale teorema alla dinamica del processo  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  ottenuto in Esercizio 1.b.