

Esame Metodi e Modelli per la Finanza – 16.04.2024

(i) (6/9 CFU) Rispondere ai seguenti quesiti:

- Dare la definizione di processo martingala su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.
- Sia $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ in processo di Wiener. Verificare se i processi W e $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, tale che $X_t := W_t^2$, $t \geq 0$ sono $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ -martingale.

(ii) (6/9 CFU) Rispondere ai seguenti quesiti:

- Dare la definizione di strategia di arbitraggio.
- Enunciare il primo teorema fondamentale dell'APT e dimostrare che, se il prezzo di un asset è una \mathbb{Q} -martingala, allora anche il valore scontato del portafoglio lo è.
- Quali caratteristiche derivano dal primo teorema di APT se si ipotizza un modello di Black-Scholes-Merton? Giustificare la risposta.

(iii) (6/9 CFU) Definire i modelli a volatilità stocastica, specificandone la dinamica real-world. Determinare, inoltre, la PDE per la valutazione di strumenti derivati in tali modelli tramite costruzione di un portafoglio di replica. Di quanti derivati si ha bisogno? Motivare la risposta, mostrando tutti i passaggi matematici necessari.