STATISTICA AVANZATA ED ECONOMETRIA

A. Tancredi

Prova scritta del 15-1-2016

A Siano $y_1, \dots, y_n$ delle osservazioni Normali indipendenti come media βx_i per $i = 1, \dots, n$ e varianza σ^2 nota. Siano inoltre $x_1, \dots, x_n$ costanti note.

1. Dimostrare che
$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$
è uno stimatore non distorto per β
2. Calcolare la varianza di $\tilde{\beta}$
3. Calcolare l'informazione osservata $J(\beta)$ e l'informazione di Fisher $I(\beta)$
4. Dimostrare che $Var(\tilde{\beta}) > Var(\hat{\beta})$ dove $\hat{\beta}$ è lo stimatore di massima verosimiglianza di β

B Sia $(y_1, \dots, y_n)$ un campione casuale estratto da una popolazione Y che si distribuisce come una variabile casuale con densità

$$f(y;\theta) = \begin{cases} 0 & y < c \\ \theta c^\theta / y^{\theta+1} & y \geq c \end{cases}$$

1. Verificare che $f(y;\theta)$ definisce effettivamente una densità
2. Calcolare la funzione di verosimiglianza per θ
3. Calcolare la funzione di logverosimiglianza per θ
4. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ
5. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per θ di livello $1 - 2\alpha$
6. Dimostrare che $\log Y$ si distribuisce come $\log c + Exp(\theta)$
7. Sia $\psi = 1/\theta$. Calcolare $\hat{\psi}$ e stabilire se è non distorto
8. Determinare un intervallo di confidenza per ψ di livello $1 - 2\alpha$

C Consideriamo un campione casuale $z_1, \dots, z_n$ estratto da una distribuzione Normale bivariata

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

1. Calcolare la funzione di verosimiglianza per ρ
2. Calcolare la funzione di logverosimiglianza per ρ
3. Verificare che il valore atteso della funzione score $U(Z_1, \dots, Z_n; \rho)$ è pari a 0