STATISTICA AVANZATA ED ECONOMETRIA

A. Tancredi

Prova scritta del 19-2-2016

A Sia $(y_1, \ldots, y_n)$ un campione casuale estratto da una popolazione Y che si distribuisce come una v.c. con densità

$$f(y;\theta) = \frac{\theta}{(1+y)^{1+\theta}} \quad y > 0 \quad \theta > 0$$

1. Verificare che $f(y;\theta)$ definisce effettivamente una densità
2. Calcolare la funzione di verosimiglianza per θ
3. Calcolare la funzione di logverosimiglianza per θ
4. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ
5. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per θ di livello $1 - 2\alpha$
6. Determinare l'espressione della statistica test del rapporto delle verosimiglianze per verificare il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 1$ rispetto a $H_a : \theta \neq 1$

B Sia $(y_1, \ldots, y_n)$ un campione casuale estratto da una v.c di Poisson con media λ, ovvero

$$P(Y_i = y_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_i}}{y_i!} \quad y_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0$$

Sia $\psi = P(Y_i = 0) = e^{-\lambda}$.

1. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro ψ
2. Scrivere la funzione di verosimiglianza per ψ
3. Verificare che la varianza asintotica per $\hat{\psi}$ è $(\psi^2 \log(1/\psi))/n$, ovvero $e^{-2\lambda}\lambda/n$
4. Sia $\tilde{\psi} = (\sum_{i=1}^n z_i)/n$ dove

$$z_i = \begin{cases} 1 & se\ y_i = 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Dimostrare che $E(\tilde{\psi}) = \psi$

C Sia X una v.a. discreta che assume i valori $x = 1, 2, 3, \ldots$ con probabilità

$$P(X = x) = ke^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 1, 2,$$

dove $\lambda > 0$, ovvero una v.c. Poisson che non assume il valore 0 (Poisson troncata in 0).

1. Dimostrare che $k = 1/(1 - e^{-\lambda})$
2. Dimostrare che $E(X) = \lambda/(1 - e^{-\lambda})$
3. Scrivere la funzione di verosimiglianza per λ
4. Scrivere l'equazione che determina la stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}$
5. Verificare che la funzione score ha media nulla
6. Consideriamo lo stimatore $\bar{y} = (\sum_{i=1}^n y_i)/n$ dove

$$y_i = \begin{cases} 0 & se\ x_i = 1 \\ x_i & altrimenti \end{cases}$$

   Dimostrare che $E(\bar{Y}) = \lambda$