

# Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta del 16-06-2017

A Sia  $y = (y_1, \dots, y_n)$  un campione di osservazioni indipendenti generate da una v.c  $Y$  discreta avente distribuzione di probabilità

$$P(Y = y; \theta) = (y + 1)(1 - \theta)^2 \theta^y \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza per  $\theta$
2. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$
3. Determinare la funzione generatrice dei momenti della v.c.  $Y$  e dimostrare che  $E(Y) = 2\theta/(1 - \theta)$
4. Calcolare l'informazione di Fisher per  $\theta$
5. Sia  $\psi = 2\theta/(1 - \theta)$  Trovare  $\hat{\psi}$ , ovvero lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\psi$  e verificare che  $E(\hat{\psi}) = \psi$
6. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per  $\theta$ .

B Sia  $y = (y_1, \dots, y_n)$  un campione di osservazioni indipendenti generate da una v.c  $Y$  continua con densità

$$f(y; \lambda) = k e^{-\lambda y^2} \quad y \geq 0, \lambda \geq 0$$

1. Stabilire che relazione intercorre tra  $Y$  e una v.c. Normale con media 0
2. Determinare il valore della costante  $k$
3. Riportare la funzione di verosimiglianza per  $\lambda$  e una statistica sufficiente.
4. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\lambda$
5. Determinare l'espressione della statistica test del rapporto di verosimiglianza per verificare l'ipotesi nulla  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  rispetto all'alternativa  $\lambda \neq \lambda_0$
6. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\psi = 1/(2\lambda)$ , stabilirne la distribuzione esatta e riportarne media e varianza

C Rispondere a scelta ad una delle seguenti domande teoriche

1. Dimostrare il teorema del limite centrale
2. Dimostrare la normalità asintotica dello stimatore di massima verosimiglianza  $\hat{\theta}$
3. Ricavare lo stimatore dei minimi quadrati generalizzati riportando l'espressione della varianza e illustrando un esempio .