# Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta dell'8-9-2017

A Si consideri un campione casuale $(x_1, \ldots, x_n)$ di $n$ osservazioni da una v.c. $X$ con densità

$$f(x;\theta) = (1+\theta)x^\theta \quad x \in [0,1]$$

dove $\theta > -1$

1. Verificare che $f(x;\theta)$ è una funzione di densità e calcolare il valore atteso $E(X)$
2. Scrivere la funzione di verosimiglianza per $\theta$
3. Individuare una statistica sufficiente
4. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\theta$
5. Indicare il supporto della v.c. $Y = \log X$?
6. Verificare che $-Y \sim Exp(\theta + 1)$ e che la funzione score ha media pari a 0.
7. Calcolare l'informazione di Fisher per $\theta$
8. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per $\theta$.

B Sia $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un campione casuale estratto da una v.c. discreta $Y$ avente la seguente d.d.p.

$$Y \sim \left\{1, 2, 3;\ \theta,\ 2\theta\frac{1-\theta}{1+\theta},\ \frac{(1-\theta)^2}{1+\theta}\right\}$$

dove $\theta \in (0,1)$

1. Indicando con $n_1, n_2, n_3$ il numero totale di osservazioni che assumo rispettivamente i valori 1,2 e 3, dove $n_1 + n_2 + n_3 = n$, riportare l'espressione della funzione di verosimiglianza
2. Indicando con $f_i = n_i/n$ le frequenza relative per $i = 1, 2, 3$ verificare che l'equazione da risolvere per determinare la stima di massima verosimiglianza è

$$\theta^2 + [2(1-f_1) + f_3]\theta - (1-f_3) = 0$$

3. Verificare infine che l'unica soluzione ammissibile (in quanto compresa tra 0 e 1) risulta essere

$$\hat{\theta} = -1 + (f_1 - f_3/2) + \sqrt{(f_1 - f_3/2)^2 + 2(1-f_1)}$$

C Rispondere a scelta ad una delle seguenti domande teoriche

1. Dato il modello lineare $y = X\beta + \epsilon$, dove $E(\epsilon) = 0$ e $Var(\epsilon) = \sigma^2 I$, dimostare che lo stimatore dei minimi quadrati è $\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t y$ . Calcolare $E(\hat{\beta})$ e $Var(\hat{\beta})$
2. Dato il modello lineare $y = X\beta + \epsilon$, dove $E(\epsilon) = 0$ e $Var(\epsilon) = \sigma^2\Psi$ riportare lo stimatore dei minimi quadrati generalizzati $\tilde{\beta}$, l'espresione della matrice di varianze e covarianze di $\tilde{\beta}$ e illustrare un caso particolare in cui lo stimatore $\tilde{\beta}$ deve essere preferito allo stimatore dei minimi quadrati