

Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta del '9-1-2018

A Si consideri un campione casuale (x_1, \dots, x_n) di n osservazioni da una v.c. X con densità

$$f(x; \theta) = (1 + \theta)(1 - x)^\theta \quad x \in [0, 1]$$

dove $\theta > 0$

1. Verificare che $f(x; \theta)$ è una funzione di densità e calcolare il valore atteso $E(X)$
2. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ
3. Individuare una statistica sufficiente
4. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ
5. Indicare il supporto della v.c. $Y = -\log(1 - X)$?
6. Verificare che $-Y \sim \text{Exp}(\theta + 1)$ e che la funzione score ha media pari a 0.
7. Calcolare l'informazione di Fisher per θ
8. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per θ .

B Sia $y = (y_1, \dots, y_n)$ un campione casuale estratto da una v.c. discreta Y avente la seguente d.d.p.

$$Y \sim \left\{ 1, 2, 3; \theta, 2\theta \frac{1 - \theta}{1 + \theta}, \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta} \right\}$$

dove $\theta \in (0, 1)$

1. Indicando con n_1, n_2, n_3 il numero totale di osservazioni che assumo rispettivamente i valori 1, 2 e 3, dove $n_1 + n_2 + n_3 = n$, riportare l'espressione della funzione di verosimiglianza
2. Indicando con $f_i = n_i/n$ le frequenze relative per $i = 1, 2, 3$ verificare che l'equazione da risolvere per determinare la stima di massima verosimiglianza è

$$\theta^2 + [2(1 - f_1) + f_3]\theta - (1 - f_3) = 0$$

3. Stabilire come si distribuisce f_1 e ricavare uno stimatore per θ alternativo a quello di massima verosimiglianza

C Rispondere alla seguente domanda teorica

1. Dato il modello lineare $y = X\beta + \epsilon$, dove $E(\epsilon) = 0$ e $\text{Var}(\epsilon) = \sigma^2\Psi$ riportare lo stimatore dei minimi quadrati generalizzati $\tilde{\beta}$, l'espressione della matrice di varianze e covarianze di $\tilde{\beta}$ e illustrare un caso particolare in cui lo stimatore $\tilde{\beta}$ deve essere preferito allo stimatore dei minimi quadrati