

# Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta del '9-1-2018

A Si consideri un campione casuale  $(x_1, \dots, x_n)$  di  $n$  osservazioni da una v.c.  $X$  con densità

$$f(x; \theta) = (1 + \theta)(1 - x)^\theta \quad x \in [0, 1]$$

dove  $\theta > 0$

1. Verificare che  $f(x; \theta)$  è una funzione di densità e calcolare il valore atteso  $E(X)$
2. Scrivere la funzione di verosimiglianza per  $\theta$
3. Individuare una statistica sufficiente
4. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$
5. Indicare il supporto della v.c.  $Y = -\log(1 - X)$ ?
6. Verificare che  $-Y \sim \text{Exp}(\theta + 1)$  e che la funzione score ha media pari a 0.
7. Calcolare l'informazione di Fisher per  $\theta$
8. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per  $\theta$ .

B Sia  $y = (y_1, \dots, y_n)$  un campione casuale estratto da una v.c. discreta  $Y$  avente la seguente d.d.p.

$$Y \sim \left\{ 1, 2, 3; \theta, 2\theta \frac{1 - \theta}{1 + \theta}, \frac{(1 - \theta)^2}{1 + \theta} \right\}$$

dove  $\theta \in (0, 1)$

1. Indicando con  $n_1, n_2, n_3$  il numero totale di osservazioni che assumo rispettivamente i valori 1, 2 e 3, dove  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ , riportare l'espressione della funzione di verosimiglianza
2. Indicando con  $f_i = n_i/n$  le frequenze relative per  $i = 1, 2, 3$  verificare che l'equazione da risolvere per determinare la stima di massima verosimiglianza è

$$\theta^2 + [2(1 - f_1) + f_3]\theta - (1 - f_3) = 0$$

3. Stabilire come si distribuisce  $f_1$  e ricavare uno stimatore per  $\theta$  alternativo a quello di massima verosimiglianza

C Rispondere alla seguente domanda teorica

1. Dato il modello lineare  $y = X\beta + \epsilon$ , dove  $E(\epsilon) = 0$  e  $\text{Var}(\epsilon) = \sigma^2\Psi$  riportare lo stimatore dei minimi quadrati generalizzati  $\tilde{\beta}$ , l'espressione della matrice di varianze e covarianze di  $\tilde{\beta}$  e illustrare un caso particolare in cui lo stimatore  $\tilde{\beta}$  deve essere preferito allo stimatore dei minimi quadrati