Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta del 10-6-2018

A Si consideri un campione casuale $(x_1, \ldots, x_n)$ di n osservazioni da una v.c. X con densità

$$f(x;\theta) = 2\theta\, x\, e^{-\theta x^2} \quad x \geq 0$$

dove $\theta > 0$.

1. Verificare che $f(x;\theta)$ è una funzione di densità
2. Verificare che $Y = X^2$ si distribuisce come una v.c. esponenziale con media $1/\theta$
3. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ associata al campione $(x_1, \ldots, x_n)$
4. Individuare una statistica sufficiente
5. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ
6. Verificare la funzione score ha media pari a 0.
7. Calcolare l'informazione di Fisher per θ
8. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per θ con livello di confidenza $(1 - 2\alpha)\%$.
9. Supponendo che $n = 30$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 25$, riportare il valore numerico dell'intervallo ottenuto con un livello di confidenza pari al 95% ($z_{0.025} \approx -1.96$)
10. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\psi = 1/\theta$ e verificare che è uno stimatore corretto per ψ

B Sempre con riferimento alla densità dell'esercizio precedente, supponiamo ora di avere altre m osservazioni, $x_{n+1}, \ldots, x_m$ per le quali sappiamo solo che sono maggiori di una costante c

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza associata a tutte le $n+m$ osservazioni. (Può essere utile osservare che la funzione di ripartizione di X è $F_X(x) = 1 - e^{-\theta x^2}$)
2. Determinare una statistica sufficiente per θ
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza per θ

C Si consideri un vettore $(x_1, \ldots, x_n)$ di n osservazioni indipendendenti. Supponiamo che x_i, per $i = 1, \ldots, n$, è stata generata da una v.c. X_i con densità

$$f(x_i;\theta) = 2c_i\theta\, x\, e^{-c_i\,\theta x^2} \quad x \geq 0$$

dove $\theta > 0$ e $c_1, \ldots, c_n$ sono costanti positive note

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ
2. Determinare una statistica sufficiente per θ
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza per θ

D Supponiamo di avere n coppie di osservazioni (y_{i1}, y_{i2}) dove $y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ indipendentemente per $j = 1, 2$ e $i = 1, \ldots, n$.

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza per $\theta = (\mu_1, \ldots, \mu_n, \sigma^2)$
2. Determinare le stime di massima verosimiglianza per μ_i per $i = 1, \ldots, n$
3. Dedterminare la funzione di verosimiglianza profilo per σ^2
4. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per σ^2 e stabilirne il suo valore atteso. Tale stimatore non è corretto e neanche consistente, provare a dare una spiegazione intuitiva della mancanza di consistenza.