Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta del 19-7-2019

A Si consideri un campione casuale $(x_1, \dots, x_n)$ di n osservazioni da una v.c. X con densità

$$f(x; \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2x}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)^2\right)$$

dove $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \mu^3/\lambda$. Supponiamo che λ sia noto

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza per μ associata al campione $(x_1, \dots, x_n)$
2. Individuare una statistica sufficiente
3. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per μ
4. Verificare la funzione score ha media pari a 0.
5. Calcolare l'informazione di Fisher per μ
6. Verificare che tale stimatore è corretto e raggiunge il limite inferiore di Cramer-Rao
7. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per μ con livello di confidenza $(1 - 2\alpha)\%$.

B Sempre con riferimento alla densità dell'esercizio precedente, supponiamo ora che anche il parametro λ sia incognito

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza per μ, λ
2. Determinare una statistica sufficiente per μ, λ
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza per μ, λ
4. Verificare che la matrice di informazione di Fisher è diagonale. Questo fatto suggerisce qualcosa sulla dipendenza asintotica tra $\hat{\lambda}$ e $\hat{\mu}$?

C Siano $(x_1, \dots, x_n)$ n osservazioni indipendenti ed esponenziali con media $1/\lambda$ e $y_1, \dots, y_n$ n osservazioni indipendenti ed esponenziali con media $1/\lambda^2$ e independenti dalle precedenti

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza per λ
2. Determinare una statistica sufficiente per λ
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza per λ
4. Verificare che si tratta di uno stimatore consistente