Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta del 11-9-2018

A Si consideri un campione casuale $(x_1, \ldots, x_n)$ di n osservazioni da una v.c. X con densità
$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \quad x \geq 0$$
dove $\theta > 0$.

1. Verificare che $f(x;\theta)$ è una funzione di densità
2. Verificare che $Y = X^2$ si distribuisce come una v.c. esponenziale con media θ^2
3. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ associata al campione $(x_1, \ldots, x_n)$
4. Individuare una statistica sufficiente
5. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ
6. Verificare la funzione score ha media pari a 0.
7. Calcolare l'informazione di Fisher per θ
8. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per θ con livello di confidenza $(1-2\alpha)\%$.
9. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\psi = \theta^2$ e verificare che è uno stimatore corretto per ψ
10. Stabilire se la varianza di $\hat{\psi}$ raggiunge il limite inferiore di Carmer-Rao

B Sia $(x_1, \ldots, x_n)$ un campione *i.i.d.* generato da una v.c. Normale con media θ e varianza θ^2 e $y_1, \ldots, y_m$ un campione *i.i.d* generato da una variabile casuale Esponenziale con media θ. Supponiamo anche che i due campioni siano indipendendenti

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza associata a tutte le $n+m$ osservazioni.
2. Determinare una statistica sufficiente per θ
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza per θ

C Si consideri un vettore $(x_1, \ldots, x_n)$ di n osservazioni indipendendenti. Supponiamo che x_i, per $i = 1, \ldots, n$, è stata generata da una v.c. X con densità
$$f(x;\alpha) = 2\phi(x)\Phi(\alpha x)$$
dove $\phi(x)$ e $\Phi(x)$ indicano rispettivamente la funzione di densità e di ripartizione d una normale standard

1. Disegnare il grafico della densità $f(x;\alpha)$ quando $\alpha = 1, -1, \infty$ e $-\infty$
2. Disegnare il grafico della funzione di verosimiglianza per α quando $n = 1$ e $x_1 > 0$
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza per α quando tutte le osservazioni del campione sono positive