

Metodi Statistici per L'Economia

A. Tancredi

Prova scritta del 10-09-2019

A Si consideri un campione casuale (x_1, \dots, x_n) di n osservazioni da una v.c. X con densità

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}\sqrt{x}} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\theta} \right)^{1/2} \right\} \quad x \geq 0$$

dove $\theta > 0$.

1. Verificare che $f(x; \theta)$ è una funzione di densità
2. Verificare che $Y = \sqrt{X}$ si distribuisce come una v.c. esponenziale con media $\sqrt{\theta}$
3. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ associata al campione (x_1, \dots, x_n)
4. Individuare una statistica sufficiente
5. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ
6. Verificare la funzione score ha media pari a 0.
7. Calcolare l'informazione di Fisher per θ
8. Determinare un intervallo di confidenza approssimato per θ con livello di confidenza $(1 - 2\alpha)\%$.
9. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\psi = \sqrt{\theta}$ e verificare che è uno stimatore corretto per ψ
10. Stabilire se la varianza di $\hat{\psi}$ raggiunge il limite inferiore di Cramer-Rao

B Siano (y_1, y_2) due campioni indipendenti dove $y_1 = (y_{11} \dots, y_{1n_1}) \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(t_1\gamma_1, 1)$ e $y_2 = (y_{21} \dots, y_{2n_2}) \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(t_2\gamma_2, 1)$ con t_1 e t_2 costanti positive note

1. Scrivere la funzione di verosimiglianza per $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$
2. Determinare una statistica sufficiente
3. Determinare la stima di massima verosimiglianza per γ_1 e γ_2 .
4. Determinare la stima di massima verosimiglianza, $\hat{\psi}$ per $\psi = (t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2)$
5. Riportare media e varianza per $\hat{\psi}$