Prove di ammissione 2017-2018
Matematica – prima prova

Risolvere i seguenti quesiti descrivendo (per gli esercizi A, B e C) in modo conciso ma esauriente il procedimento risolutivo.

Esercizio A. Carlo corre lungo una piccola pista di atletica che racchiude una regione piana P costituita da un rettangolo R, e da due semi-cerchi i cui diametri coincidono con i lati minori di R. E' noto che l'area di P è uguale a $27600/\pi$ m^2, e che il perimetro di R è uguale a $(200/\pi + 502)$ m. Carlo parte dal via, corre lungo la pista a velocità costante, e a ogni minuto (esatto) constata la sua posizione. Dopo un minuto si trova 43 m indietro rispetto al via. Dopo un certo numero *n* di minuti constata (per la prima volta dopo essere partito), di trovarsi esattamente al via. Quanti minuti *n* sono passati?

Esercizio B. Sia $B_1(0,0)$ il cerchio di centro l'origine del piano cartesiano e raggio uguale a uno. Si consideri inoltre la retta r definita da $y = 1/2-x$. Per ogni $(x,y) \in r$ sia $B_1(x,y)$ il cerchio di centro (x,y) e raggio uguale a uno. Si determini il punto $(x_0,y_0) \in r$ che massimizza l'area dell'intersezione tra $B_1(0,0)$ e $B_1(x,y)$. (Si consiglia di usare argomenti puramente geometrici senza calcolare esplicitamente l'area di tale intersezione.)

Esercizio C. Determinare la scomposizione in fattori primi dei seguenti numeri $x = 5^6 - 1$, $y = 15^4 - 50^2$. Si determinino inoltre le ultime cifre decimali di x^x, x^y, y^x, y^y.

Esercizio D. Ogni funzione continua $f : [0,1] \to R$ verifica le seguenti proprietà: (stabilire la veridicità/falsità delle seguenti affermazioni.)

(1) Esiste $0 \leq t \leq 1$ tale che $\int_0^t f(x)\,dx = \int_t^1 f(x)\,dx$. V F
(2) La funzione f ammette almeno un punto di minimo. V F
(3) Esiste $0 < t < 1$ tale che $f(t) = 1/2$. V F
(4) Esiste $0 < t < 1$ tale che $f(t) = (f(0)+f(1))/2$. V F

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Scuola Superiore di Studi Avanzati
Viale Regina Elena, 291 – 00161 Roma
Tel.: 06 49255546-47 Fax: 06 49255548
E-mail: ssas@uniroma1.it