



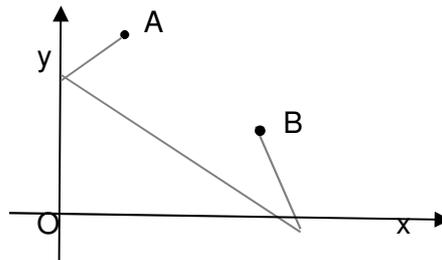
Prove di ammissione 2014-15 Matematica – prima prova

Rispondere a tutti i quesiti

1. Sia $f(x)$ un polinomio a coefficienti interi. Verificare la validità della seguente affermazione: se per ogni intero positivo n l'equazione $f(x) = n$ ammette almeno una soluzione intera, allora si ha che $f(x) = \pm x + c$ per una qualche costante c

2. Dimostrare che un numero è razionale se e solo se si può scrivere come numero decimale periodico.

3. Dato un sistema cartesiano ortogonale Oxy e dati due punti A e B nel primo quadrante si considerino le spezzate da A a B che toccano entrambe gli assi coordinati (vedi figura). Si determini la spezzata di lunghezza minima.



4. Siano a, b, c numeri reali non nulli, tali che

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

Dimostrare che

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} = \frac{1}{(a+b+c)^5}$$

5. Al centro di una piscina quadrata c'è un ladro, mentre in uno degli angoli c'è un poliziotto che non sa nuotare. Il poliziotto può correre tre volte più velocemente di quanto il ladro possa nuotare, ma il ladro può correre più velocemente del poliziotto. C'è un modo in cui il ladro possa scappare dalla piscina?

6. Dimostrare che, in ogni gruppo di 18 numeri interi consecutivi da tre cifre (nella scrittura decimale), ce n'è almeno uno che è divisibile per la somma delle sue cifre.